TATA42/9GMA04: inledande problem 2023

I **8.1** Förenkla följande uttryck till formen $p(x)+\mathcal{O}(x^n)$, där $p(x)$ är ett polynom och resttermen är den bästa möjliga (största möjliga heltal n):

(a) $\big(1+x-x^2/2+\mathcal{O}(x^3)\big)-\big(x+x^2+\mathcal{O}(x^3)\big)+\big(2-x^2+\mathcal{O}(x^4)\big)$

(b) $\big(x-x^2+x^3+\mathcal{O}(x^4)\big)\big(x-x^2+x^3+\mathcal{O}(x^4)\big)$

(c) $\big(x-x^2+x^3+\mathcal{O}(x^4)\big)^3$

I **8.2** Förenkla $\mathcal{O}(t^4)$ till $\mathcal{O}(x^n)$ med största möjliga heltal n om

(a) $t=-x$

(b) $t=2x^2$

(c) $t=3x+x^2$

(d) $t=-x^3/2+\mathcal{O}(x^4)$

(e) $t=\mathcal{O}(x)$

(f) $t=\mathcal{O}(x^3)$

I **8.3** Om $f(x)$ ges av följande uttryck, avgör om f har lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera i $x=0$:

(a) $2+x^2+\mathcal{O}(x^3)$

(b) $-2+x^2+\mathcal{O}(x^3)$

(c) $2-x^2+\mathcal{O}(x^3)$

(d) $-2-x^2+\mathcal{O}(x^3)$

(e) $5+x^3+\mathcal{O}(x^5)$

(f) $3+\mathcal{O}(x^2)$

I **8.4** (a) Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 3 med restterm i Lagranges form för $\ln(1+x)$.

(b) Visa med hjälp av utvecklingen i (a) att

$$\left|\ln\frac{11}{10}-\frac{143}{1500}\right|\le\frac{1}{40\,000}.$$

(c) Bestäm en bättre approximation p/q till $\ln(11/10)$, nämligen en som uppfyller

$$\left|\ln\frac{11}{10}-\frac{p}{q}\right|\le\frac{1}{100\,000}.$$

p/q får skrivas som en oförenklad summa av rationella tal.

I **10.1** Låt $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+x^3}$.

(a) Motivera varför olikheterna $\quad 0\le f(x)\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}\quad$ och $\quad 0\le f(x)\le\dfrac{1}{x^3}$

gäller för alla $x>0$. Skissa graferna för $f(x)$, $1/\sqrt{x}$ och $1/x^3$ i samma koordinatsystem, och markera speciellt deras inbördes lägen då $0<x<1$ respektive $x>1$.

(b) Vilka uppskattningar av $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_1^\infty f(x)\,dx$ och $\int_0^\infty f(x)\,dx$ följer av olikheterna $0\le f(x)\le 1/\sqrt{x}$? Vilken eller vilka av dessa uppskattningar är användbara?

(c) Vilka uppskattningar av $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_1^\infty f(x)\,dx$ och $\int_0^\infty f(x)\,dx$ följer av olikheterna $0\le f(x)\le 1/x^3$? Vilken eller vilka av dessa uppskattningar är användbara?

(d) Vilken bästa uppskattning av $\int_0^\infty f(x)\,dx$ får vi från ovanstående deluppgifter?

I 10.2 Låt $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}+x^3}$.

(a) Förvissa dig om att olikheterna $0 \le x^3 \le \sqrt{x}$ gäller då $0 < x < 1$. Visa sedan att

$$0 \le \frac{1+x}{2\sqrt{x}} \le f(x) \le \frac{1+x}{\sqrt{x}}, \qquad 0 < x < 1,$$

och uppskatta $\int_0^1 f(x)\,dx$ med hjälp av dessa olikheter.

(b) Förvissa dig om att olikheterna $x^3 \ge \sqrt{x} \ge 0$ gäller då $x > 1$. Visa sedan att

$$0 \le \frac{1+x}{2x^3} \le f(x) \le \frac{1+x}{x^3}, \qquad x > 1,$$

och uppskatta $\int_1^\infty f(x)\,dx$ med hjälp av dessa olikheter.

(c) Vilken instängning $A \le \int_0^\infty f(x)\,dx \le B$ får vi från (a) och (b)?

I 10.3 Låt $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^4+1}$. Vi ska undersöka $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

(a) Låt $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^4}$. Visa att $0 \le f(x) \le g(x)$ då $x > 1$ och att $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx = \frac{7}{3}$.

(b) Kan vi med hjälp av (a) avgöra om $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

(c) Låt nu $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Visa att $f(x) \ge g(x) \ge 0$ då $x > 1$ och att $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx = 1$.

(d) Kan vi med hjälp av (c) avgöra om $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

(e) Låt $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ igen. Visa att att $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 2$ då $x \to \infty$, att $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx = 1$, och att $\int_1^\infty f(x)\,dx$ och $\int_1^\infty g(x)\,dx$ är generaliserade endast i ∞.

(f) Kan vi med hjälp av (e) avgöra om $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

I 10.4 Låt $f(x) = \dfrac{1}{x+\sin x}$. Vi ska undersöka $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(a) Låt $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Visa att $0 \le f(x) \le g(x)$ då $0 < x < 1$ och att $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ är divergent.

(b) Kan vi med hjälp av (a) avgöra om $\int_0^1 f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

(c) Låt nu $g(x) = \dfrac{1}{2x}$. Visa att $f(x) \ge g(x) \ge 0$ då $0 < x < 1$ och att $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ är divergent. (Som bekant är $0 \le \sin x \le x$ då $0 \le x \le \pi$.)

(d) Kan vi med hjälp av (c) avgöra om $\int_0^1 f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

(e) Låt $g(x) = \dfrac{1}{x}$ igen. Visa att $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{1}{2}$ då $x \to 0^+$, att $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ är divergent, och att $\int_0^1 f(x)\,dx$ och $\int_0^1 g(x)\,dx$ är generaliserade endast i 0.

(f) Kan vi med hjälp av (e) avgöra om $\int_0^1 f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent? Kan vi säga något om integralens värde?

Svar på nästa sida!

TATA42/9GMA04: inledande problem 2023, svar

I **8.1** (a) $3 - 5x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$

(b) $x^2 - 2x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^5)$

(c) $x^3 - 3x^4 + 6x^5 + \mathcal{O}(x^6)$

I **8.2** (a) $\mathcal{O}(x^4)$

(b) $\mathcal{O}(x^8)$

(c) $\mathcal{O}(x^4)$

(d) $\mathcal{O}(x^{12})$

(e) $\mathcal{O}(x^4)$

(f) $\mathcal{O}(x^{12})$

I **8.3** (a) Lokalt minimum: $2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 2 + x^2\big(1 + \mathcal{O}(x)\big)$

(b) Lokalt minimum: $-2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3) = -2 + x^2\big(1 + \mathcal{O}(x)\big)$

(c) Lokalt maximum: $2 - x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 2 + x^2\big(-1 + \mathcal{O}(x)\big)$

(d) Lokalt maximum: $-2 - x^2 + \mathcal{O}(x^3) = -2 + x^2\big(-1 + \mathcal{O}(x)\big)$

(e) Ingetdera: $5 + x^3 + \mathcal{O}(x^5) = 5 + x^3\big(1 + \mathcal{O}(x^2)\big)$

(f) Informationen räcker inte till för att avgöra frågan

I **8.4** (a) $\underbrace{\ln(1+x)}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}_{\text{Approximation}} \underbrace{- \frac{x^4}{4(1+\xi)^4}}_{\text{Approximationsfel}}$ för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x

(b) $x = 1/10$ i (a) ger

$$\underbrace{\ln(11/10)}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{(1/10) - \frac{(1/10)^2}{2} + \frac{(1/10)^3}{3}}_{= 143/1500,\ \text{approximation}} \underbrace{- \frac{(1/10)^4}{4(1+\xi)^4}}_{\text{Approximationsfel}}$$

för något ξ mellan 0 och 1/10, så, eftersom $(1+\xi)^4 \geq (1+0)^4 = 1$,

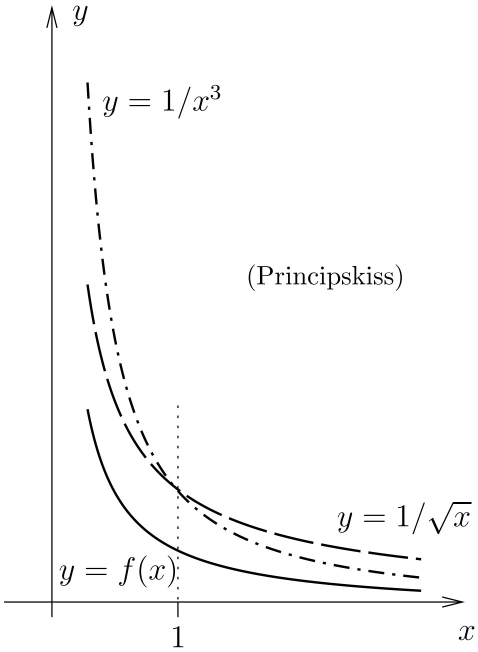
$$\left|\ln\frac{11}{10} - \frac{143}{1500}\right| = \left|-\frac{(1/10)^4}{4(1+\xi)^4}\right| = \frac{1}{40\,000\,(1+\xi)^4} \leq \frac{1}{40\,000}.$$

(c) $\dfrac{p}{q} = (1/10) - \dfrac{(1/10)^2}{2} + \dfrac{(1/10)^3}{3} - \dfrac{(1/10)^4}{4}$ duger, med

$$|\text{felet}| = \left|\ln\frac{11}{10} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{(1/10)^5}{5(1+\xi)^5}\right| = \frac{(1/10)^5}{5(1+\xi)^5} \leq \frac{1}{500\,000} \leq \frac{1}{100\,000},$$

ty ξ ligger mellan 0 och 1/10, så $(1+\xi)^5 \geq 1$. (Utveckla $\ln(1+x)$ ett steg längre!)

I **10.1** (a)



(b) Endast $0 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ är användbar eftersom $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ och $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ är divergenta ($= \infty$).

(c) Endast $0 \leq \int_1^\infty f(x)\,dx \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}$ är användbar eftersom $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}\,dx$ och $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}\,dx$ är divergenta ($= \infty$).

(d) $0 \leq \int_0^\infty f(x)\,dx \leq \frac{5}{2}$.

I **10.2** (a) $\frac{4}{3} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{8}{3}$

(b) $\frac{3}{4} \leq \int_1^\infty f(x)\,dx \leq \frac{3}{2}$

(c) $\frac{25}{12} \leq \int_0^\infty f(x)\,dx \leq \frac{25}{6}$

I **10.3** (a) —

(b) Ja, $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent, och $0 \leq \int_1^\infty f(x)\,dx \leq 7/3$.

(c) —

(d) Nej, (c) ger inte besked eftersom den mindre integralen $\int_1^\infty g(x)\,dx$ är konvergent.

(e) —

(f) Ja, $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent, men (e) ger ingen uppskattning av $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

I **10.4** (a) —

(b) Nej, (a) ger inte besked eftersom den större integralen $\int_0^1 g(x)\,dx$ är divergent.

(c) —

(d) Ja, $\int_0^1 f(x)\,dx$ är divergent ($= \infty$) eftersom den mindre integralen $\int_0^1 g(x)\,dx$ är divergent.

(e) —

(f) Ja, $\int_0^1 f(x)\,dx$ är divergent ($= \infty$).