Exempel 2

Är $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ konvergent?

Lösning: Integralen är generaliserad i 0 och ∞ och måste därför delas i två:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}.$$

För $0 < x \leq 1$ är $x \geq x^3$ vilket ger

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{g_0(x)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}_{h_0(x)\to 1,\ x\to 0^+} \implies$$

$$\implies \frac{f(x)}{g_0(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \to 1 \quad \text{då } x \to 0^+.$$

Exempel 2

Därmed har vi visat att förutsättningarna för Sats 10.13 (Jämförelsesats II, JPK) är uppfyllda. Ur denna följer det att antingen är båda integralerna konvergenta eller båda divergenta. Då

$$\int_0^1 \left(g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

är konvergent enligt Sats 10.12 (b) ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$) fås att

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$$

också är konvergent.

Exempel 2

Då $x \geq 1$ gäller att $x^3 \geq x$ så

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}_{g_\infty(x)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}_{h_\infty(x)\to 1,\ x\to\infty} \implies$$

$$\implies \frac{f(x)}{g_\infty(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to 1 \quad \text{då } x \to \infty.$$

Exempel 2

Därmed har vi visat att förutsättningarna för Sats 10.13 (Jämförelsesats II, JPK) är uppfyllda. Ur denna följer det att antingen är båda integralerna konvergenta eller båda divergenta. Då

$$\int_1^\infty \left(g_\infty(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}\right) dx$$

är konvergent enligt Sats 10.12 (a) ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) fås att

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$$

också är konvergent. Då båda delintegralerna är konvergenta är

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$$

konvergent.