Exempel 3

Är
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{k}-\tan\frac{1}{k}\right)$$
konvergent eller divergent?
Lösning: Både
$$\sin\frac{1}{k}\quad\text{och}\quad\tan\frac{1}{k}\to 0$$
då $k\to\infty$ så Divergenstestet ger inget. För att kunna svara på frågan måste vi få koll på *hur fort* termerna går mot noll.

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k=\sin\frac{1}{k}-\tan\frac{1}{k}=\sin\frac{1}{k}-\frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}}=\sin\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right)=$$
$$=\sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k}-1}{\cos\frac{1}{k}}\overset{*}{=}\frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2k^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)-1\right)=$$
$$=\underbrace{\frac{1}{k^3}}_{b_k}\,\frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)<0$$

enligt ledet före den *-märkta likheten, $\cos\frac{1}{k}-1\le 0$. Följaktligen är termerna inte positiva så jämförelsesatserna kan inte användas.

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,
$$\frac{-a_k}{b_k}=\frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\to\frac{1}{2}>0$$
då $k\to\infty$. Då
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k=\frac{1}{k^3}\right)$$
är konvergent enligt sats 10.5 ($\alpha=3>1$) ger jämförelse på kvotform att $\sum_{k=0}^{\infty}(-a_k)$ är konvergent och därmed att
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k=\sin\frac{1}{k}-\tan\frac{1}{k}\right)\qquad\text{är konvergent.}$$