Exempel 4

För $k \geq 1$ definiera

$$a_k = \begin{cases} \sin \frac{1}{k} & \text{om } k \text{ är udda} \\ \sin \frac{1}{k^2} & \text{om } k \text{ är jämnt} \end{cases}.$$

Är $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent eller divergent?

Lösning: Vi börjar med att observera att $a_k > 0$ för alla k och att $a_k \to 0$ då $k \to \infty$, MEN a_k avtar INTE mot 0 så Leibniz kriterium kan INTE användas.

Exempel 4

Studera istället delsummorna

$$S_{2N} = \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k a_k = \begin{bmatrix} \text{dela upp, udda } k \text{ för} \\ \text{sig, jämna för sig} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} a_{2k} - \sum_{k=1}^{N} a_{2k-1} = J_N - U_N$$

och studera J_N och U_N var för sig. Notera att

$$a_{2k-1} = \sin \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2k-1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(2k-1)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{k}{2k-1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right),$$

$$a_{2k} = \sin \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^6}\right)$$

Exempel 4

Vi börjar med $J_N = \sum_{k=1}^{N} a_{2k}$. Jämförelse på kvotform med $1/k^2$ ger

$$\frac{a_{2k}}{1/k^2} = \frac{1}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right) \to \frac{1}{4}$$

då $k \to \infty$. Då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent enligt Sats 10.5, sid 442 i boken ($\alpha = 2 > 1$), följer det att även $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{(2k)^2}$ är konvergent enligt Sats 10.7 (Jämförelsesats II för positiva serier, sid 446). Då J_N är en delsumma till ovanstående serie följer det att J_N har ett ändligt gränsvärde då $N \to \infty$.

Exempel 4

På samma sätt ser vi att U_N är jämförbar med $1/k$, ty

$$\frac{a_{2k-1}}{1/k} = \frac{k}{2k-1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \to \frac{1}{2}$$

då $k \to \infty$. Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent enligt Sats 10.5, sid 442 i boken följer det att även

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2k-1}$$

är divergent enligt Sats 10.7 (Jämförelsesats II för positiva serier, sid 446). Då U_N är en delsumma till ovanstående serie följer det , eftersom termerna i U_N är positiva , att $U_N \to \infty$ då $N \to \infty$.

Exempel 4

Följaktligen gäller

$$S_{2N} = J_N - U_N \to -\infty, \quad \text{då} \quad N \to \infty$$

och därmed är serien divergent.
Anmärkning: Observera att serien uppfyller två av tre krav i Leibniz kriterium, den är alternerande och termerna går mot noll. Leibniz kriterium är dock inte tillämpbart eftersom termernas belopp inte avtar!