Exempel 5

Finns det en funktion f med följande egenskaper:

- f är kontinuerlig på $[0, \infty[$ och $f(x) \geq 0$,
- för varje heltal $n \geq 0$ är $f(x)$ obegränsad på $[n, \infty[$,
- $\int_0^\infty f(x)dx$ är konvergent.

Motivera att en sådan funktion inte kan finnas ***eller*** konstruera en funktion med ovanstående egenskaper.

Lösning: Det finns en funktion som har de efterfrågade egenskaperna! Observera att detta är en avgörande skillnad mellan serier (vars termer går mot noll om serien är konvergent) och generaliserade integraler.

Exempel 5

Det finns många sätt att konstruera en sån här funktion. Ett sätt är följande:
Låt T_k vara en triangel med bas 4^{-k} och höjd 2^k, d v s basen minskar mot 0 och höjden ökar mot ∞ då $k \to \infty$ och

$$\begin{aligned}\text{arean av } T_k = A_k &= \frac{1}{2}\text{bas}\cdot\text{höjd} = \frac{1}{2}\cdot 4^{-k}\cdot 2^k = \frac{1}{2}\cdot \left(2^2\right)^{-k}\cdot 2^k = \\ &= 2^{-1}\cdot 2^{-2k}\cdot 2^k = 2^{-k-1} \to 0\end{aligned}$$

då $k \to \infty$.

Exempel 5

Vi avstår från att ge en formel för hur den sökta funktionen skall se ut, utan nöjer oss med att beskriva dess graf.

$$\begin{array}{llll}
1 \leq x < 1 + \frac{1}{4} & \text{graf } T_1, & 1 + \frac{1}{4} \leq x < 2 & \text{graf } f = 0, \\
2 \leq x < 2 + \frac{1}{4^2} & \text{graf } T_2, & 2 + \frac{1}{4^2} \leq x < 3 & \text{graf } f = 0, \\
3 \leq x < 3 + \frac{1}{4^3} & \text{graf } T_3, & 3 + \frac{1}{4^3} \leq x < 4 & \text{graf } f = 0, \\
4 \leq x < 4 + \frac{1}{4^4} & \text{graf } T_4, & 4 + \frac{1}{4^4} \leq x < 5 & \text{graf } f = 0
\end{array}$$

och så vidare.
Grafen till f består alltså av x-axeln för det mesta, d v s $f = 0$, men till höger om $x = k$ ligger triangeln T_k som blir högre och smalare ju större k blir. Följaktligen uppfyller f de två första kraven i uppgiften.

Exempel 5

Återstår att beräkna integralen. Då värdet av denna är den samlade arean under grafen följer det att

$$\int_1^\infty f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}(\text{arean av } T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} = \frac{2^{-2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

då summan är en konvergent geometrisk serie med första term $= 2^{-2}$ och kvot $= \frac{1}{2}$.

Exempel 5