Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \Bigg\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \sin\varphi, \right.$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\, 0 \leq r \leq \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le r \le \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \right.$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2\varphi \, d\varphi$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le r \le \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le r \le \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{3} \right.$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le r \le \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le r \le \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \overset{t=\varphi}{=}$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x=r(\varphi)\cos\varphi \\ y=r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x{=}r(\varphi)\cos\varphi \\ y{=}r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} {=} \sqrt{r(\varphi)^2{+}r'(\varphi)^2}\, d\varphi{=}$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \sin\varphi \\ r'(\varphi) = \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x{=}r(\varphi)\cos\varphi \\ y{=}r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} {=} \sqrt{r(\varphi)^2{+}r'(\varphi)^2}\, d\varphi{=}$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \sin\varphi \\ r'(\varphi) = \cos\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\sin^2\varphi{+}\cos^2\varphi}\, d\varphi$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \sin\varphi \\ r'(\varphi) = \cos\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \sin\varphi \\ r'(\varphi) = \cos\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x{=}r(\varphi)\cos\varphi \\ y{=}r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} {=} \sqrt{r(\varphi)^2{+}r'(\varphi)^2}\,d\varphi{=}$$
$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \sin\varphi \\ r'(\varphi) = \cos\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\sin^2\varphi{+}\cos^2\varphi}\,d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} ds(\varphi)$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x{=}r(\varphi)\cos\varphi \\ y{=}r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \sin\varphi \\ r'(\varphi) = \cos\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x=r(\varphi)\cos\varphi \\ y=r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$
$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \sin\varphi \\ r'(\varphi) = \cos\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$
$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \sin\varphi \\ r'(\varphi) = \cos\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Svar: $A = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$
$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \sin\varphi \\ r'(\varphi) = \cos\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Svar: $A = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ respektive $L = \frac{2\pi}{3}$.