Exempel 1

Beräkna följande gränsvärden:

- (a) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\arctan x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$
- (b) $\lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x}-x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)$
- (c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{|1-x^2|}+x^7}{x^4+x^7}$
- (d) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\cos x-\sqrt{|1-x^2|}+x^7}{x^4+x^7}$

$\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\arctan x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)=?$

Vi börjar med att sätta på gemensamt bråk och utnyttja standardgränsvärden för att slippa utveckla så många termer.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arctan x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\arctan x}{\arctan x\ln(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\arctan x}{\frac{\arctan x}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot x^2}=\begin{bmatrix}\text{räkneregler för}\\ \text{gränsvärden}\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\arctan x}{x^2}.$$

Gör vi på detta sätt får vi också direkt svar på hur långt vi behöver utveckla termerna i täljaren, i detta fall till grad 2.

$\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\arctan x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)=?$

Maclaurinutveckling t.o.m. ordning 2, d v s med restterm av grad 3 ger

$$\left.\begin{aligned}\ln(1+x)&=x-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3)\\ \arctan x&=x+\mathcal{O}(x^3)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$\frac{\ln(1+x)-\arctan x}{x^2}=\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3)-(x+\mathcal{O}(x^3))}{x^2}=$$

$$\frac{-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\mathcal{O}(x)\to-\frac{1}{2}$$

då $x\to 0$.

$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x}-x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)=?$

Sätt $t=\dfrac{1}{x}$. Observera att då $x\to\infty$ så $t\to 0^+$ eftersom $\dfrac{1}{x}>0$. Vi kan ju bara gå mot ∞ från ett håll. Vi får

$$xe^{1/x}=\frac{1}{t}e^t=\frac{1}{t}\left(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\mathcal{O}(t^4)\right)=$$

$$=\frac{1}{t}+1+\mathcal{O}(t),$$

$$x^2\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{t^2}\sin t=\frac{1}{t^2}\left(t-\frac{1}{6}t^3+\mathcal{O}(t^5)\right)=$$

$$=\frac{1}{t}+\mathcal{O}(t).$$

Då det räcker med en nollskild term och restterm ser vi att kan stanna utvecklingarna redan vid $\mathcal{O}(t)$.

$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x} - x^2\sin\frac{1}{x}\right) = ?$

Vi får

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x} - x^2\sin\frac{1}{x}\right) = \left[\begin{array}{c} t = 1/x \\ x\to\infty \iff t\to 0^+ \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}e^t - \frac{1}{t^2}\sin t\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t} + 1 + \mathcal{O}(t) - \frac{1}{t} + \mathcal{O}(t)\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0^+}(1 + \mathcal{O}(t)) = 1$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \sqrt{|1-x^2|} + x^7}{x^4 + x^7}$

Då $x \to 0$ kan vi ta bort beloppet innanför rottecknet; om $x \to 0$ så måste ju x^2 förr eller senare vara mindre än 1. Vidare, då x är litet dominerar x^4 över x^7 i nämnaren. För att vi då skall kunna få ut nåt ur detta måste vi utveckla t.o.m. ordning 4. Vi får

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6),$$

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2} = \left[\text{tänk } t = -x^2\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \binom{1/2}{2}(-x^2)^2 + \mathcal{O}\left((-x^2)^3\right) =$$

$$= \left[\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} = -\frac{1}{8}\right] = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \sqrt{|1-x^2|} + x^7}{x^4 + x^7}$

Insättning av utvecklingarna ger täljaren

$$T: \quad \cos x - \sqrt{|1-x^2|} + x^7 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right) + x^7 =$$

$$= \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^6) + x^7 = \frac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$$

$$N: \quad x^4 + x^7$$

$$\frac{T}{N} = \frac{\frac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^6)}{x^4 + x^7} = \frac{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)}{1 + x^3} \to \frac{1}{6}$$

då $x \to 0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x - \sqrt{|1-x^2|} + x^7}{x^4 + x^7}$

Kuggfråga! Hör ju hemma i Envariabelanalys, del 1. Bryt ut x^2 ur rotuttrycket och x^7 i täljare och nämnare eftersom det är den som är dominant då x är stort. Vi får

$$\frac{\cos x - \sqrt{|1-x^2|} + x^7}{x^4 + x^7} = \frac{\frac{\cos x}{x^7} + \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^6} + 1}{1 + \frac{1}{x^3}} \to 1$$

då $x \to \infty$.