Exempel 5, Taylor och Lagrange.

Låt $f(x) = (x-1)^2 \ln x$.

- (a) Bestäm Taylorutvecklingen till $f(x)$ av ordning 3 kring $x = 1$ med restterm på Lagranges form (restterm av grad 4).
- (b) Visa att $|f(x) - p(x)| \leq 10^{-4}$ om $|x-1| \leq 10^{-1}$, där $p(x)$ är *Taylorpolynomet* av grad 3 till $f(x)$ i $x = 1$.

Lösning: (a) Tack vare faktorn $(x-1)^2$ behöver vi bara beräkna Taylorutvecklingen till $\ln x$ av ordning 1.

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x, & g'(x) &= \frac{1}{x}, & g''(x) &= -\frac{1}{x^2}, \\ g(1) &= \ln 1 = 0, & g'(1) &= 1, & g''(\xi) &= -\frac{1}{\xi^2} \end{aligned}$$

så att

Exempel 5, Taylor och Lagrange.

$$g(x) = \ln x = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}\frac{1}{\xi^2}(x-1)^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f(x) = (x-1)^2 g(x) = (x-1)^3 - \frac{1}{2\xi^2}(x-1)^4$$

för något ξ mellan 1 och x.

Exempel 5, Taylor och Lagrange.

(b) Låt $p(x)$ beteckna Taylorpolynomet $= (x-1)^3$ och antag att $|x-1| < 0,1$. Enligt (a) är $f(x) = (x-1)^3 - \frac{1}{2\xi^2}(x-1)^4$ för något ξ mellan 1 och x. Då $|x-1| \leq 10^{-1}$ följer det att $0,9 \leq \xi \leq 1,1$ så att

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= \left|(x-1)^3 - \frac{1}{2\xi^2}(x-1)^4 - (x-1)^3\right| = \\ &= \left|-\frac{1}{2\xi^2}(x-1)^4\right| = \frac{1}{2\xi^2}|x-1|^4 \leq \\ &\leq \frac{1}{2 \cdot 0,9^2}|x-1|^4 \leq \frac{1}{1,62} \cdot \frac{1}{10^4} < 10^{-4}. \qquad \text{VSB} \end{aligned}$$