Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},$$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) \ =$$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) \;=\; -\frac{1}{(1+x)^2},$$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) =$$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \le \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) =$$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4},$$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)}(x)$$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}$$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}, \qquad \ldots$$

$$f^{(n)}(x)$$

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \qquad \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Exempel 6, Lagrange.

Med hjälp av standardutveckling och formeln för den n:e derivatan får vi

Exempel 6, Lagrange.

Med hjälp av standardutveckling och formeln för den n:e derivatan får vi

$$\ln(1+x) =$$

Exempel 6, Lagrange.

Med hjälp av standardutveckling och formeln för den n:e derivatan får vi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

Exempel 6, Lagrange.

Med hjälp av standardutveckling och formeln för den n:e derivatan får vi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}$$

Exempel 6, Lagrange.

Med hjälp av standardutveckling och formeln för den n:e derivatan får vi

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \\
&= x - \frac{x}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Exempel 6, Lagrange.

Med hjälp av standardutveckling och formeln för den n:e derivatan får vi

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \\ &= x - \frac{x}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\end{aligned}$$

för något ξ mellan 0 och x.

Exempel 6, Lagrange.

Med hjälp av standardutveckling och formeln för den n:e derivatan får vi

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \\ &= x - \frac{x}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\end{aligned}$$

för något ξ mellan 0 och x.

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x) =$Maclaurinpolynomet

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att

$$-\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{4}$$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\dfrac{1}{4} \leq \xi \leq \dfrac{1}{4}$ så att

$$|\ln(1+x) - p(x)| =$$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{4}$ så att

$$|\ln(1+x) - p(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \right| =$$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att
$-\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{4}$ så att

$$|\ln(1+x) - p(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq$$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\dfrac{1}{4} \leq \xi \leq \dfrac{1}{4}$ så att

$$|\ln(1+x) - p(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}}$$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\dfrac{1}{4} \leq \xi \leq \dfrac{1}{4}$ så att

$$|\ln(1+x) - p(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)(4(1-\frac{1}{4}))^{n+1}}$$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{4}$ så att

$$
\begin{aligned}
|\ln(1+x) - p(x)| &= \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq \\
&\leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)(4(1-\frac{1}{4}))^{n+1}} = \\
&= \frac{1}{(n+1)(4\frac{3}{4})^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{4}$ så att

$$|\ln(1+x) - p(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)(4(1-\frac{1}{4}))^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(4\frac{3}{4})^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}.$$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\dfrac{1}{4} \leq \xi \leq \dfrac{1}{4}$ så att

$$\begin{aligned} |\ln(1+x) - p(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq \\ \leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)(4(1-\frac{1}{4}))^{n+1}} = \\ = \frac{1}{(n+1)(4\frac{3}{4})^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Då $3^4 = 9^2 = 81$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att
$-\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{4}$ så att

$$
\begin{aligned}
|\ln(1+x) - p(x)| &= \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq \\
&\leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)(4(1-\frac{1}{4}))^{n+1}} = \\
&= \frac{1}{(n+1)(4\frac{3}{4})^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Då $3^4 = 9^2 = 81$ och $4 \cdot 81 = 324$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{4}$ så att

$$
\begin{aligned}
|\ln(1+x) - p(x)| &= \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq \\
&\leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)(4(1-\frac{1}{4}))^{n+1}} = \\
&= \frac{1}{(n+1)(4\frac{3}{4})^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Då $3^4 = 9^2 = 81$ och $4 \cdot 81 = 324$ så ser vi att $n = 3$ duger,

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x) =$Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\dfrac{1}{4} \leq \xi \leq \dfrac{1}{4}$ så att

$$|\ln(1+x) - p(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)(4(1-\frac{1}{4}))^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(4\frac{3}{4})^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}.$$

Då $3^4 = 9^2 = 81$ och $4{\cdot}81 = 324$ så ser vi att $n = 3$ duger, ty då är

$$|\ln(1+x) - p(x)|$$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x) =$Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{4}$ så att

$$| \ln(1+x) - p(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)(4(1-\frac{1}{4}))^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(4\frac{3}{4})^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}.$$

Då $3^4 = 9^2 = 81$ och $4 \cdot 81 = 324$ så ser vi att $n = 3$ duger, ty då är

$$|\ln(1+x) - p(x)| \leq \frac{1}{(3+1)3^{3+1}}$$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\dfrac{1}{4} \leq \xi \leq \dfrac{1}{4}$ så att

$$|\ln(1+x) - p(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)(4(1-\frac{1}{4}))^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(4\frac{3}{4})^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}.$$

Då $3^4 = 9^2 = 81$ och $4 \cdot 81 = 324$ så ser vi att $n = 3$ duger, ty då är

$$|\ln(1+x) - p(x)| \leq \frac{1}{(3+1)3^{3+1}} = \frac{1}{324}$$

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ =Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\dfrac{1}{4} \leq \xi \leq \dfrac{1}{4}$ så att

$$|\ln(1+x) - p(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)(4(1-\frac{1}{4}))^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(4\frac{3}{4})^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}.$$

Då $3^4 = 9^2 = 81$ och $4 \cdot 81 = 324$ så ser vi att $n = 3$ duger, ty då är

$$|\ln(1+x) - p(x)| \leq \frac{1}{(3+1)3^{3+1}} = \frac{1}{324} < \frac{1}{300}.$$