

Exempel 6, Lagrange.

Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| < \frac{1}{300} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och beräkna så många derivator att du ser systemet.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \dots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

1 / 3

Exempel 6, Lagrange.

Med hjälp av standardutveckling och formeln för den n :e derivatan får vi

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \\ &= x - \frac{x}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \end{aligned}$$

för något ξ mellan 0 och x .

2 / 3

Exempel 6, Lagrange.

Låter vi $p(x)$ = Maclaurinpolynomet och $|x| \leq 1/4$ får vi att $-\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{4}$ så att

$$\begin{aligned} |\ln(1+x) - p(x)| &= \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1)(4(1+\xi))^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)(4(1-\frac{1}{4}))^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{(n+1)(4\frac{3}{4})^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Då $3^4 = 9^2 = 81$ och $4 \cdot 81 = 324$ så ser vi att $n = 3$ duger, ty då är

$$|\ln(1+x) - p(x)| \leq \frac{1}{(3+1)3^{3+1}} = \frac{1}{324} < \frac{1}{300}.$$

3 / 3