Exempel 4

Lös integralekvationen

$$y'(x) + \int_\pi^x y(t)\,dt = x^3, \quad y(0) = 0.$$

Lösning: Vi börjar med att observera att integralen är 0 för $x = \pi$ oavsett vilken (integrerbar) funktion vi har som $y(t)$. Insättning av $x = \pi$ i ekvationen ger därför

$$y'(\pi) + \int_\pi^\pi y(t)\,dt = y'(\pi) = \pi^3.$$

Då derivatan av integralen är integranden (Analysens huvudsats) ger derivering av ekvationen

$$D\left(y'(x) + \int_\pi^x y(t)\,dt\right) = y''(x) + y(x) = D\left(x^3\right) = 3x^2$$

vilket är en andra ordningens ordinär differentialekvation med konstanta koefficienter.

Exempel 4

Vi söker den lösning till ekvationen för vilken

$$y(0) = 0 \text{ (givet i uppgiften) och } y'(\pi) = \pi^3 \text{ (enligt ovan).}$$

Lösning av den karakteristiska ekvaionen ger

$$P(r) = r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i \iff y_h = A\cos x + B\sin x.$$

Eftersom

$$P(D)(\text{polynom av grad } n) = \text{polynom av grad } n$$

och vi har $3x^2$ i högerledet ansätter vi

$$y_p = ax^2 + bx + c \Longrightarrow y_p' = 2ax + b \Longrightarrow y'' = 2a.$$

Exempel 4

Insättning i ekvationen ger

$$P(D)y_p = y_p'' + y_p = 2a + (ax^2 + bx + c) = ax^2 + bx + (2a + c) = 3x^2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{cases} \iff y_p = 3x^2 - 6 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = y_h + y_p = A\cos x + B\sin x + 3x^2 - 6.$$

$$y(0) = 0 \Longrightarrow A\cos 0 + B\sin 0 + 3\cdot 0^2 - 6 = A - 6 = 0 \iff A = 6.$$

Då derivatan av $y(x)$ är $y'(x) = -6\sin x + B\cos x + 6x$ ger insättning av $x = \pi$

$$y'(\pi) = -6\sin\pi + B\cos\pi + 6\pi = 6\pi - B = \pi^3 \iff B = 6\pi - \pi^3$$

så att

$$y = 6\cos x - \pi(\pi^2 - 6)\sin x + 3x^2 - 6.$$