Exemple 7

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$.

Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$

$$r = \frac{1}{2}$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$
$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$
\begin{aligned}
P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff& \\
r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}&
\end{aligned}
$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$
$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1 \Longrightarrow$$

$$P(r) = (r-2)(r+1)$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1 \Longrightarrow$$

$$P(r) = (r-2)(r+1), \quad y_h =$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1 \implies$$

$$P(r) = (r-2)(r+1), \quad y_h = C_1 e^{-x}$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$
$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1 \implies$$
$$P(r) = (r-2)(r+1), \quad y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$.
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$
$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1 \implies$$
$$P(r) = (r-2)(r+1), \quad y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Då y_h och högerledet $10e^x \sin x$ inte har något gemensamt

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x.$
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$\begin{aligned}
&P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff \\
&\qquad r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1 \Longrightarrow \\
&P(r) = (r-2)(r+1), \quad y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.
\end{aligned}$$

Då y_h och högerledet $10e^x \sin x$ inte har något gemensamt kommer y_p att bli på formen

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$.
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$
$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1 \Longrightarrow$$
$$P(r) = (r-2)(r+1), \quad y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Då y_h och högerledet $10e^x \sin x$ inte har något gemensamt kommer y_p att bli på formen

$$y_p = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$.
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$
$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1 \Longrightarrow$$
$$P(r) = (r-2)(r+1), \quad y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Då y_h och högerledet $10e^x \sin x$ inte har något gemensamt kommer y_p att bli på formen

$$y_p = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

Vi skall lösa ekvationen på tre olika sätt.

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning.

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A \cos x + B \sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$y_p' =$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$y_p' = \ e^x(-A\sin x + B\cos x$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$y_p' = e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned} y_p' = {} & e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\ = {} & e^x((A+B)\cos x \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned} y_p' = &\ e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\ = &\ e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\ &= e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\ y_p'' &= \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\ &= e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\ y_p'' &= e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\ &= e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\ y_p'' &= e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x + \\ &\quad + (A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned}
y_p' &= e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\
&= e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\
y_p'' &= e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x + \\
&\quad + (A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) = \\
&= e^x(2B\cos x - 2A\sin x)
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned}
y_p' &= e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\
&= e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\
y_p'' &= e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x + \\
&\quad + (A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) = \\
&= e^x(2B\cos x - 2A\sin x), \\
y'' - y' - 2y &=
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned}
y_p' &= e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\
&= e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\
y_p'' &= e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x + \\
&\quad + (A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) = \\
&= e^x(2B\cos x - 2A\sin x), \\
y'' - y' - 2y &= e^x
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned} y_p' = &\ e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\ = &\ e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\ y_p'' = &\ e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x + \\ &\quad + (A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) = \\ = &\ e^x(2B\cos x - 2A\sin x), \\ y'' - y' - 2y = &\ e^x(2B\cos x - 2A\sin x \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned}
y_p' &= e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\
&= e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\
y_p'' &= e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x + \\
&\quad + (A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) = \\
&= e^x(2B\cos x - 2A\sin x), \\
y'' - y' - 2y &= e^x(2B\cos x - 2A\sin x - \\
&\quad - ((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x)
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned}
y_p' &= e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\
&= e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\
y_p'' &= e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x + \\
&\qquad + (A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) = \\
&= e^x(2B\cos x - 2A\sin x), \\
y'' - y' - 2y &= e^x(2B\cos x - 2A\sin x - \\
&\quad - ((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) - \\
&\quad - 2(A\cos x + B\sin x))
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$
\begin{aligned}
y_p' &= e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\
&= e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\
y_p'' &= e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x + \\
&\quad + (A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) = \\
&= e^x(2B\cos x - 2A\sin x), \\
y'' - y' - 2y &= e^x(2B\cos x - 2A\sin x - \\
&- ((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) - \\
&- 2(A\cos x + B\sin x)) = \\
&= e^x((-3A+B)\cos x
\end{aligned}
$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\ &= e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\ y_p'' &= e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x + \\ &\qquad + (A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) = \\ &= e^x(2B\cos x - 2A\sin x), \\ y'' - y' - 2y &= e^x(2B\cos x - 2A\sin x - \\ &- ((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) - \\ &- 2(A\cos x + B\sin x)) = \\ &= e^x((-3A+B)\cos x + (-A-3B)\sin x) \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned}
y_p' = {} & e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\
= {} & e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\
y_p'' = {} & e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x + \\
& + (A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) = \\
= {} & e^x(2B\cos x - 2A\sin x), \\
y'' - y' - 2y = {} & e^x(2B\cos x - 2A\sin x - \\
& - ((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) - \\
& - 2(A\cos x + B\sin x)) = \\
= {} & e^x((-3A+B)\cos x + (-A-3B)\sin x) = \\
= {} & e^x(0\cos x
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned}
y_p' &= e^x(-A\sin x + B\cos x + A\cos x + B\sin x) = \\
&= e^x((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x), \\
y_p'' &= e^x(-(A+B)\sin x + (-A+B)\cos x + \\
&\qquad + (A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) = \\
&= e^x(2B\cos x - 2A\sin x), \\
y'' - y' - 2y &= e^x(2B\cos x - 2A\sin x - \\
&- ((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x) - \\
&- 2(A\cos x + B\sin x)) = \\
&= e^x((-3A+B)\cos x + (-A-3B)\sin x) = \\
&= e^x(0\cos x + 10\sin x)
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + B = 0 \\ \end{cases}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + B = 0 \\ -A - 3B = 10 \end{cases}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + B = 0 \\ -A - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\iff}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + B = 0 \\ -A - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\iff} \begin{cases} \qquad\qquad B = 3A \\ \end{cases}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + B = 0 \\ -A - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} B = 3A \\ -10A = 10 \end{cases}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + \ \ B = \ \ 0 \\ \ \ -A - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\iff} \begin{cases} \qquad\quad B = 3A \\ -10A = \ 10 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A = -1 \\ \end{cases}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + \quad B = \quad 0 \\ \quad -A - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \qquad\quad B = 3A \\ -10A = \; 10 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + B = 0 \\ -A - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\iff} \begin{cases} B = 3A \\ -10A = 10 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases} \implies \quad y_p =$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + B = 0 \\ {-A} - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\iff} \begin{cases} B = 3A \\ -10A = 10 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases} \implies \qquad y_p = -e^x(\cos x$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + \ \ B = \ \ 0 \\ \ \ -A - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \qquad B = 3A \\ -10A = \ 10 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases} \Longrightarrow \qquad y_p = -e^x(\cos x + 3\sin x)$$

så att

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + B = 0 \\ -A - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} B = 3A \\ -10A = 10 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases} \Longrightarrow \qquad y_p = -e^x(\cos x + 3\sin x)$$

så att

$$y = y_h + y_p =$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + B = 0 \\ -A - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} B = 3A \\ -10A = 10 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases} \Longrightarrow \qquad y_p = -e^x(\cos x + 3\sin x)$$

så att

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{cases} -3A + \quad B = \quad 0 \\ \quad -A - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\iff} \begin{cases} \qquad\quad B = 3A \\ -10A = \ 10 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases} \implies \qquad y_p = \ - e^x(\cos x + 3\sin x)$$

så att

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - e^x(\cos x + 3\sin x)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi
$y_p = e^x z(x)$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln.

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e^x}\sin x$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e^x} \sin x$$

$$P(D+1) =$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e^x}\sin x$$

$$P(D+1) = ((D+1) - 2)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e^x} \sin x$$

$$P(D+1) = ((D+1)-2)((D+1)+1)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e^x} \sin x$$

$$P(D+1) = ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned} P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e^x} \sin x \\ P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\ &= D^2 + D - 2 \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$
\begin{aligned}
P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e^x}\sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z =
\end{aligned}
$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned}
P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e}^x P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\ \cancel{e}^x \sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$
\begin{aligned}
P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\ \cancel{e^x} \sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned}
P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e^x} \sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned}
P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e^x} \sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1).

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned} P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e^x} \sin x \\ P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\ &= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \qquad (1) \end{aligned}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned} P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e^x} \sin x \\ P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\ &= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10\sin x. \end{aligned} \tag{1}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$z' = -A\sin x + B\cos x$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned}
P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e^x} \sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$z' = -A\sin x + B\cos x, \qquad z'' = -A\cos x - B\sin x$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\ \cancel{e^x} \sin x$$

$$\begin{aligned} P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\ &= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \qquad (1) \end{aligned}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$z' = -A\sin x + B\cos x, \qquad z'' = -A\cos x - B\sin x \Longrightarrow$$

$z'' + z' - 2z =$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\ \cancel{e^x} \sin x$$

$$\begin{aligned} P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\ &= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \end{aligned} \tag{1}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$z' = -A\sin x + B\cos x, \qquad z'' = -A\cos x - B\sin x \Longrightarrow$$

$$z'' + z' - 2z = -A\cos x - B\sin x$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$
\begin{aligned}
P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\ \cancel{e^x} \sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$z' = -A\sin x + B\cos x, \qquad z'' = -A\cos x - B\sin x \Longrightarrow$$

$$z'' + z' - 2z = -A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e^x}\sin x$$
$$P(D+1) = ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) =$$
$$= D^2 + D - 2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10\sin x. \qquad (1)$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$z' = -A\sin x + B\cos x, \qquad z'' = -A\cos x - B\sin x \Longrightarrow$$
$$z'' + z' - 2z = -A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x) -$$
$$-2(A\cos x + B\sin x)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned}
P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\ \cancel{e^x} \sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10\sin x. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$z' = -A\sin x + B\cos x, \qquad z'' = -A\cos x - B\sin x \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
z'' + z' - 2z = &- A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x) - \\
&- 2(A\cos x + B\sin x) = \\
&= (-A + B - 2A)\cos x
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e^x} \sin x$$

$$\begin{aligned} P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\ &= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10\sin x. \qquad (1) \end{aligned}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$z' = -A\sin x + B\cos x, \qquad z'' = -A\cos x - B\sin x \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} z'' + z' - 2z = &-A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x) - \\ &- 2(A\cos x + B\sin x) = \\ &= (-A + B - 2A)\cos x + (-B - A - 2B)\sin x \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned}
P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\ \cancel{e^x} \sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$z' = -A\sin x + B\cos x, \qquad z'' = -A\cos x - B\sin x \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
z'' + z' - 2z = &- A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x) - \\
&- 2(A\cos x + B\sin x) = \\
&= (-A + B - 2A)\cos x + (-B - A - 2B)\sin x = \\
&= (-3A + B)\cos x
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$
\begin{aligned}
P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\ \cancel{e^x} \sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$
z' = -A\sin x + B\cos x, \qquad z'' = -A\cos x - B\sin x \Longrightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
z'' + z' - 2z = & -A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x) - \\
& - 2(A\cos x + B\sin x) = \\
& = (-A + B - 2A)\cos x + (-B - A - 2B)\sin x = \\
& = (-3A + B)\cos x + (-A - 3B)\sin x
\end{aligned}
$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_p = P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\ \cancel{e^x} \sin x$$

$$\begin{aligned} P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\ &= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \end{aligned} \tag{1}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$z' = -A\sin x + B\cos x, \qquad z'' = -A\cos x - B\sin x \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} z'' + z' - 2z = &-A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x) - \\ &- 2(A\cos x + B\sin x) = \\ &= (-A + B - 2A)\cos x + (-B - A - 2B)\sin x = \\ &= (-3A + B)\cos x + (-A - 3B)\sin x = 10\sin x \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned}
P(D)y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\ \cancel{e^x} \sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$z' = -A\sin x + B\cos x, \qquad z'' = -A\cos x - B\sin x \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
z'' + z' - 2z = &- A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x) - \\
&- 2(A\cos x + B\sin x) = \\
&= (-A + B - 2A)\cos x + (-B - A - 2B)\sin x = \\
&= (-3A + B)\cos x + (-A - 3B)\sin x = 10\sin x
\end{aligned}$$

vilket ger samma ekvationssystem och lösning som metod 1.

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y =$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$.

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$P(D)Y_p =$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$P(D)Y_p = P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) =$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^{x}\sin x$

Metod 3: Då $e^{x}\sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x}z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x}z(x)\right) = \\ &= \cancel{e}^{(1+i)x}P(D+1+i)\left(z(x)\right) = \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$P(D)Y_p = P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) =$$

$$= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D + 1 + i)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e}^{(1+i)x}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$P(D)Y_p = P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) =$$

$$= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\,(z(x)) = 10\ \cancel{e}^{(1+i)x}$$

$$P(D+1+i) =$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$P(D)Y_p = P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) =$$

$$= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\,(z(x)) = 10\ \cancel{e}^{(1+i)x}$$

$$P(D+1+i) = ((D+1+i) - 2)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$P(D)Y_p = P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) =$$

$$= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e}^{(1+i)x}$$

$$P(D+1+i) = ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\ &= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e}^{(1+i)x} \\ P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\ &= (D+(-1+i)) \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\ &= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\,(z(x)) = 10\,\cancel{e}^{(1+i)x} \\ P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\ &= (D+(-1+i))(D+(2+i)) \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\ &= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\,(z(x)) = 10\,\cancel{e}^{(1+i)x} \\ P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\ &= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\ &= D^2 \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\
&= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e}^{(1+i)x} \\
P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\
&= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\
&= D^2 + (1+2i)D
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\
&= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e}^{(1+i)x} \\
P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\
&= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\
&= D^2 + (1+2i)D - 3 + i
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\
&= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e}^{(1+i)x} \\
P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\
&= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\
&= D^2 + (1+2i)D - 3 + i \Longrightarrow \\
\Longrightarrow P(D+1+i)z &=
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\
&= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e}^{(1+i)x} \\
P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\
&= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\
&= D^2 + (1+2i)D - 3 + i \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow P(D+1+i)z = z''$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\
&= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e}^{(1+i)x} \\
P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\
&= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\
&= D^2 + (1+2i)D - 3 + i \Longrightarrow \\
\Longrightarrow P(D+1+i)z &= z'' + (1+2i)z'
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\ &= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e}^{(1+i)x} \\ P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\ &= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\ &= D^2 + (1+2i)D - 3 + i \Longrightarrow \\ \Longrightarrow P(D+1+i)z &= z'' + (1+2i)z' + (-3+i)z \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\
&= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e}^{(1+i)x} \\
P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\
&= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\
&= D^2 + (1+2i)D - 3 + i \Longrightarrow \\
\Longrightarrow P(D+1+i)z &= z'' + (1+2i)z' + (-3+i)z = 10 \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow z_p =$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\
&= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e}^{(1+i)x} \\
P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\
&= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\
&= D^2 + (1+2i)D - 3 + i \Longrightarrow \\
\Longrightarrow P(D+1+i)z &= z'' + (1+2i)z' + (-3+i)z = 10 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow z_p &= \frac{10}{-3+i}
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\ &= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\left(z(x)\right) = 10\,\cancel{e}^{(1+i)x} \\ P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\ &= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\ &= D^2 + (1+2i)D - 3 + i \Longrightarrow \\ \Longrightarrow P(D+1+i)z &= z'' + (1+2i)z' + (-3+i)z = 10 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow z_p &= \frac{10}{-3+i} = \frac{10(-3-i)}{10} \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\
&= \cancel{e}^{(1+i)x} P(D+1+i)\,(z(x)) = 10\,\cancel{e}^{(1+i)x} \\
P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\
&= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\
&= D^2 + (1+2i)D - 3 + i \Longrightarrow \\
\Longrightarrow P(D+1+i)z &= z'' + (1+2i)z' + (-3+i)z = 10 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow z_p &= \frac{10}{-3+i} = \frac{10(-3-i)}{10} = -3-i.
\end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$Y_p =$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$Y_p = \,-\,(3 + i)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$Y_p = \; - (3 + i)e^{(1+i)x}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$Y_p = -(3+i)e^{(1+i)x} = -e^x(3+i)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$Y_p = \ -(3+i)e^{(1+i)x} = -e^x(3+i)(\cos x$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$Y_p = -(3+i)e^{(1+i)x} = -e^x(3+i)(\cos x + i\sin x)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$\begin{aligned} Y_p = & -(3+i)e^{(1+i)x} = -e^x(3+i)(\cos x + i\sin x) = \\ & = -e^x\big((3\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$\begin{aligned} Y_p &= -(3+i)e^{(1+i)x} = -e^x(3+i)(\cos x + i \sin x) = \\ &= -e^x\big((3\cos x - \sin x) + i(\cos x + 3\sin x)\big) \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$\begin{aligned} Y_p &= \ -(3+i)e^{(1+i)x} = -e^x(3+i)(\cos x + i \sin x) = \\ &= -e^x\big((3\cos x - \sin x) + i(\cos x + 3\sin x)\big) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow y_p &= \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$\begin{aligned} Y_p &= -(3+i)e^{(1+i)x} = -e^x(3+i)(\cos x + i\sin x) = \\ &= -e^x\big((3\cos x - \sin x) + i(\cos x + 3\sin x)\big) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow y_p &= \operatorname{Im} Y_p \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$\begin{aligned} Y_p =& -(3+i)e^{(1+i)x} = -e^x(3+i)(\cos x + i\sin x) = \\ &= -e^x\big((3\cos x - \sin x) + i(\cos x + 3\sin x)\big) \implies \\ \implies y_p =& \operatorname{Im} Y_p = -e^x(\cos x + 3\sin x) \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$\begin{aligned} Y_p &= \; -(3+i)e^{(1+i)x} = -e^x(3+i)(\cos x + i\sin x) = \\ &= -e^x\big((3\cos x - \sin x) + i(\cos x + 3\sin x)\big) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow y_p &= \; \operatorname{Im} Y_p = -e^x(\cos x + 3\sin x) \end{aligned}$$

vilket förstås är samma svar som med metod 1.