Exempel 3

Lös ekvationen

$$x^2y' = y^3$$

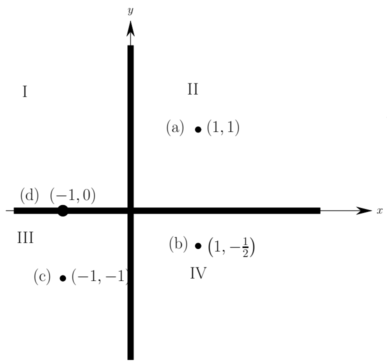
då (a) $y(1)=1$, (b) $y(1)=-\dfrac{1}{2}$, (c) $y(-1)=-1$, (d) $y(-1)=0$.

Lösning: Ekvationen är separabel ty

$$x^2y' = y^3 \iff \begin{cases} \dfrac{y'}{y^3} = \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0,\ y \neq 0 \\ \text{eller} & \\ y = 0, & \text{för alla } x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Vi börjar med att konstatera att $y \equiv 0$, d v s $y(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, löser ekvationen. Om vi börjar bakifrån med fall (d) inses att enda chansen för y att vara $= 0$ för $x = -1$ är att fortsätta vara 0 hela tiden.

Exempel 3



Studera vidstående figur. De "fetlagda" koordinataxlarna är tänkta att indikera de naturliga avgränsningar som lösandet av ekvationen berörs av. Eftersom den konstanta lösningen inte är aktuell vare sig i fall (a), (b) eller (c) antar vi fortsättningsvis att $y \neq 0$.

För $y \neq 0$ fås

$$\frac{y'}{y^3} = \frac{1}{x^2} \iff \int \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{2y^2} = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C. \qquad (1)$$

Exempel 3

(a) Insättning av villkoret $y(1) = 1$ i (1) ger

$$-\frac{1}{2(y(1))^2} = -\frac{1}{2\cdot 1^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{1} + C = \underline{\underline{C-1}} \iff C = \frac{1}{2}$$

vilket ger

$$-\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \iff \frac{1}{y^2} = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x} \iff y = \pm\sqrt{\frac{x}{2-x}}.$$

Då lösningen skall gå genom $(1,1) \in$ delområde II har vi att $x, y > 0$ vilket ger att $y = +\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$. Det största delintervall av $x > 0$ som innehåller $x = 1$ och där detta uttryck är definierat blir då det intervall där uttrycket under rot-tecknet är positivt, d v s lösningen är

$$y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}, \quad 0 < x < 2.$$

Exempel 3

(b) $y(1)=-\dfrac{1}{2}$ insatt i (1) ger

$$-\frac{1}{2(y(1))^2} = -\frac{1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \underline{\underline{-2}} = -\frac{1}{1} + C = \underline{\underline{C-1}} \iff C = -1$$

vilket ger

$$-\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{x} - 1 = -\frac{x+1}{x} \iff y^2 = \frac{x}{2x+2} \iff y = \pm\sqrt{\frac{x}{2x+2}}.$$

Då $(1, -1/2) \in$ delområde IV är $x > 0$ och $y < 0$. Då följer det att $y = -\sqrt{x/(2x+2)}$. För att detta uttryck skall vara definierat krävs att uttrycket under rot-tecknet är positivt vilket det är för alla $x > 0$. Då $x=1$ ingår i detta intervall blir lösningen

$$y = -\sqrt{\frac{x}{2x+2}}, \quad x > 0.$$

Exempel 3

(c) $y(-1) = -1$ insatt i (1) ger

$$-\frac{1}{2(y(1))^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{-1} + C = \underline{\underline{C+1}} \iff C = -\frac{3}{2}$$

vilket ger

$$-\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{x} - \frac{3}{2} = -\frac{3x+2}{2x} \iff y^2 = \frac{x}{3x+2} \iff y = \pm\sqrt{\frac{x}{3x+2}}.$$

Då $(-1,-1) \in$ delområde III är $x, y < 0$ och då följer det att $y = -\sqrt{\frac{x}{3x+2}}$. För att detta uttryck skall vara definierat krävs att uttrycket under rot-tecknet är positivt vilket det är för alla $x < -\frac{2}{3}$. Då $x = -1$ ingår i detta intervall blir lösningen

$$y = -\sqrt{\frac{x}{3x+2}}, \quad x < -\frac{2}{3}.$$

Exempel 3

Sammanfattningsvis har vi i de olika deluppgifterna, följande lösningar

(a) $y_a = \sqrt{\frac{x}{2-x}}, \quad 0 < x < 2$ går genom $(1,1) \in$ delområde II

(b) $y_b = -\sqrt{\frac{x}{2x+2}}, \ x > 0$ går genom $\left(1, -\frac{1}{2}\right) \in$ delområde IV

(c) $y_c = -\sqrt{\frac{x}{3x+2}}, \ x < -\frac{2}{3}$ går genom $(-1,-1) \in$ delområde III

(d) $y_d \equiv 0, \ x \in \mathbb{R}$ går genom $(-1, 0)$ som ligger på gränsen mellan delområde II och III. Då $y = 0$ är "förbjudet område" då vi använder lösningsmetodiken följer det att enda möjligheten för y_d att vara 0 är att vara det hela tiden. Därmed finns heller inget krav på att inskränka definitionsmängden eftersom ursprungsekvationen är meningsfull för alla $x \in \mathbb{R}$.