Exempel 5

Visa att $y = \tan x$ är *en* lösning till

$$y''' + 3y' = 5 + 11\tan^2 x + 6\tan^4 x,$$

och bestäm sedan *alla* lösningar till denna differentialekvation.

Lösning: Om $y = \tan x$ blir

$$\begin{aligned}
&y' = 1 + \tan^2 x \Longrightarrow \\
\Longrightarrow\ &y'' = 2\tan x(1+\tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x \Longrightarrow \\
\Longrightarrow\ &y''' = 2\left(1+\tan^2 x\right) + 2{\cdot}3\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right) = \\
&= \left(1+\tan^2 x\right)\left(2+6\tan^2 x\right) = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x
\end{aligned}$$

vilket insatt i ekvationen ger

$$\begin{aligned}
y''' + 3y' &= \left(2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x\right) + 3\left(1+\tan^2 x\right) = \\
&= 5 + 11\tan^2 x + 6\tan^4 x,
\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas.

Exempel 5

Enligt föregående är alltså $y_p = \tan x$ en *partikulärlösning* till den givna differentialekvationen. Homogenlösningarna bestäms av nollställena till det karakteristiska polynomet

$$\begin{aligned}
&p(r) = r^3 + 3r = r\left(r^2+3\right) = 0 \iff r = 0, \pm i\sqrt{3} \iff \\
&\iff y_h = A + B\cos\left(x\sqrt{3}\right) + C\sin\left(x\sqrt{3}\right),
\end{aligned}$$

så enligt Sats 9.1, sid 395 är

$$y = y_h + y_p = A + B\cos\left(x\sqrt{3}\right) + C\sin\left(x\sqrt{3}\right) + \tan x$$

samtliga lösningar till differentialekvationen.