Exempel 6

Bestäm den lösning till ekvationen

$$y'' - y = x(e^x + 1)$$

för vilken gäller att $y(0) = y'(0) = 0$.
Lösning: Vi börjar som alltid med att lösa den karakteristiska ekvationen för att bestämma y_h.

$$P(r) = r^2 - 1 = 0 \iff r = \pm 1 \iff y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

För att bestämma y_p skriver vi $x(e^x + 1) = x + xe^x$ och bestämmer partikulärlösningar y_{p_1} och y_{p_2} sådana att

$$P(D)y_{p_1} = x \quad \text{och} \quad P(D)y_{p_1} = xe^x.$$

Då ekvationen är linjär följer via superposition att

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}.$$

Exempel 6

För att lösa $P(D)y_{p_1} = x$ ansätter vi

$$y_{p_1} = Ax + B \Longrightarrow y'_{p_1} = A \Longrightarrow y''_{p_1} = 0 \Longrightarrow$$
$$y'' - y = 0 - Ax - B = -Ax - B = x \iff A = -1,\ B = 0,$$

d v s $y_{p_1} = -x$. För att bestämma y_{p_2} observerar vi att e^x förekommer i *både* högerled och y_h, vilket föranleder en annan ansats än standardansatsen. Här måste man göra ansatsen $y_{p_2} = (Ax^2 + Bx)e^x$. För att slippa tänka på sådant ansätter vi istället $y_{p_2} = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln.

Exempel 6

Då $P(r) = r^2 - 1 = (r+1)(r-1)$ fås

$$P(D)y_{p_2} = P(D)(e^x z) = e^x P(D+1)z = xe^x \iff$$

$$\iff P(D+1)z = ((D+1)+1)((D+1)-1)z =$$

$$= (D+2)Dz = z'' + 2z' = x.$$

Med $z = Ax^2 + Bx$ fås $z' = 2Ax + B$ och $z'' = 2A$ som insatt i ekvationen ger

$$2A + 2(2Ax + B) = 4Ax + 2A + 2B = x = 1 \cdot x + 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 4A & = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = -A = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \implies$$

$$\implies z = \frac{1}{4}\left(x^2 - x\right) \implies y_{p_2} = \frac{1}{4}\left(x^2 - x\right)e^x$$

så att $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x + \dfrac{1}{4}\left(x^2 - x\right)e^x.$