

# Exempel 7

Finn alla lösningar  $y(x)$  till  $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$ .

**Lösning:** Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff$$

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1 \implies$$

$$P(r) = (r - 2)(r + 1), \quad y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Då  $y_h$  och högerledet  $10e^x \sin x$  inte har något gemensamt kommer  $y_p$  att bli på formen

$$y_p = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

Vi skall lösa ekvationen på tre olika sätt.

# Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

**Metod 1:** Råräkning. Sätt  $y_p = e^x(A \cos x + B \sin x)$ , derivera och sätt in i ekvationen

$$\begin{aligned}y'_p &= e^x(-A \sin x + B \cos x + A \cos x + B \sin x) = \\ &= e^x((A + B) \cos x + (-A + B) \sin x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y''_p &= e^x(-(A + B) \sin x + (-A + B) \cos x + \\ &\quad + (A + B) \cos x + (-A + B) \sin x) = \\ &= e^x(2B \cos x - 2A \sin x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'' - y' - 2y &= e^x(2B \cos x - 2A \sin x - \\ &\quad - ((A + B) \cos x + (-A + B) \sin x) - \\ &\quad - 2(A \cos x + B \sin x)) = \\ &= e^x((-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \sin x) = \\ &= e^x(0 \cos x + 10 \sin x)\end{aligned}$$

# Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$\begin{aligned} \begin{cases} -3A + B = 0 \\ -A - 3B = 10 \end{cases} &\stackrel{ekv2+3ekv1}{\iff} \begin{cases} B = 3A \\ -10A = 10 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases} &\implies y_p = -e^x(\cos x + 3 \sin x) \end{aligned}$$

så att

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - e^x(\cos x + 3 \sin x)$$

# Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

**Metod 2:** För att bestämma en partikulärlösning antar vi  $y_p = e^x z(x)$  och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned} P(D)y_p &= P(D)(e^x z(x)) = e^x P(D+1)(z(x)) = 10 e^x \sin x \\ P(D+1) &= ((D+1) - 2)((D+1) + 1) = (D-1)(D+2) = \\ &= D^2 + D - 2 \implies \\ &\implies P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \end{aligned} \quad (1)$$

Ansätt  $z = A \cos x + B \sin x$  och sätt in i (1). Då fås

$$\begin{aligned} z' &= -A \sin x + B \cos x, & z'' &= -A \cos x - B \sin x \implies \\ z'' + z' - 2z &= -A \cos x - B \sin x + (-A \sin x + B \cos x) - \\ &\quad - 2(A \cos x + B \sin x) = \\ &= (-A + B - 2A) \cos x + (-B - A - 2B) \sin x = \\ &= (-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \sin x = 10 \sin x \end{aligned}$$

vilket ger samma ekvationssystem och lösning som metod 1.

# Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

**Metod 3:** Då  $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$  kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning antar vi  $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$ .  
Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D) (e^{(1+i)x} z(x)) = \\ &= e^{(1+i)x} P(D + 1 + i) (z(x)) = 10 e^{(1+i)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D + 1 + i) &= ((D + 1 + i) - 2)((D + 1 + i) + 1) = \\ &= (D + (-1 + i))(D + (2 + i)) = \\ &= D^2 + (1 + 2i)D - 3 + i \implies \end{aligned}$$

$$\implies P(D + 1 + i)z = z'' + (1 + 2i)z' + (-3 + i)z = 10 \implies$$

$$\implies z_p = \frac{10}{-3 + i} = \frac{10(-3 - i)}{10} = -3 - i.$$

# Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med  $z_p = -3 - i$  fås

$$\begin{aligned} Y_p &= -(3+i)e^{(1+i)x} = -e^x(3+i)(\cos x + i \sin x) = \\ &= -e^x((3 \cos x - \sin x) + i(\cos x + 3 \sin x)) \implies \\ \implies y_p &= \operatorname{Im} Y_p = -e^x(\cos x + 3 \sin x) \end{aligned}$$

vilket förstås är samma svar som med metod 1.