Exempel 7

Finn alla lösningar $y(x)$ till $\quad y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$.
Lösning: Karakteristiska ekvationen blir

$$
\begin{aligned}
P(r) &= r^2 - r - 2 = 0 \iff \\
r &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1 \Longrightarrow \\
P(r) &= (r-2)(r+1), \quad y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.
\end{aligned}
$$

Då y_h och högerledet $10e^x \sin x$ inte har något gemensamt kommer y_p att bli på formen

$$y_p = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

Vi skall lösa ekvationen på tre olika sätt.

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 1: Råräkning. Sätt $y_p = e^x(A \cos x + B \sin x)$, derivera och sätt in i ekvationen

$$
\begin{aligned}
y_p' =\ & e^x(-A \sin x + B \cos x + A \cos x + B \sin x) = \\
=\ & e^x((A+B) \cos x + (-A+B) \sin x), \\
y_p'' =\ & e^x(-(A+B) \sin x + (-A+B) \cos x + \\
& + (A+B) \cos x + (-A+B) \sin x) = \\
=\ & e^x(2B \cos x - 2A \sin x), \\
y'' - y' - 2y =\ & e^x(2B \cos x - 2A \sin x - \\
& - ((A+B) \cos x + (-A+B) \sin x) - \\
& - 2(A \cos x + B \sin x)) = \\
=\ & e^x((-3A+B) \cos x + (-A-3B) \sin x) = \\
=\ & e^x(0 \cos x + 10 \sin x)
\end{aligned}
$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

$$
\begin{cases} -3A + B = 0 \\ -A - 3B = 10 \end{cases} \overset{ekv2+3ekv1}{\iff} \begin{cases} B = 3A \\ -10A = 10 \end{cases} \iff
$$

$$
\iff \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \end{cases} \Longrightarrow \qquad y_p = -e^x(\cos x + 3 \sin x)
$$

så att

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - e^x(\cos x + 3 \sin x)$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 2: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$
\begin{aligned}
P(D) y_p &= P(D)\left(e^x z(x)\right) = \cancel{e^x} P(D+1)\left(z(x)\right) = 10\, \cancel{e^x} \sin x \\
P(D+1) &= ((D+1)-2)((D+1)+1) = (D-1)(D+2) = \\
&= D^2 + D - 2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow P(D+1)z = z'' + z' - 2z = 10 \sin x. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Ansätt $z = A \cos x + B \sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$
\begin{aligned}
z' &= -A \sin x + B \cos x, \qquad z'' = -A \cos x - B \sin x \Longrightarrow \\
z'' + z' - 2z &= -A \cos x - B \sin x + (-A \sin x + B \cos x) - \\
&\quad - 2(A \cos x + B \sin x) = \\
&= (-A + B - 2A) \cos x + (-B - A - 2B) \sin x = \\
&= (-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \sin x = 10 \sin x
\end{aligned}
$$

vilket ger samma ekvationssystem och lösning som metod 1.

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Metod 3: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = 10e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) = \\ &= \cancel{e^{(1+i)x}} P(D+1+i)\,(z(x)) = 10\,\cancel{e^{(1+i)x}} \\ P(D+1+i) &= ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) = \\ &= (D+(-1+i))(D+(2+i)) = \\ &= D^2 + (1+2i)D - 3 + i \implies \\ \implies P(D+1+i)z &= z'' + (1+2i)z' + (-3+i)z = 10 \implies \\ \implies z_p &= \frac{10}{-3+i} = \frac{10(-3-i)}{10} = -3 - i. \end{aligned}$$

Exempel 7: $y'' - y' - 2y = 10e^x \sin x$

Med $z_p = -3 - i$ fås

$$\begin{aligned} Y_p &= -(3+i)e^{(1+i)x} = -e^x(3+i)(\cos x + i \sin x) = \\ &= -e^x\big((3\cos x - \sin x) + i(\cos x + 3\sin x)\big) \implies \\ \implies y_p &= \operatorname{Im} Y_p = -e^x(\cos x + 3\sin x) \end{aligned}$$

vilket förstås är samma svar som med metod 1.