Komplex förskjutning, övn 9.48 c

Lös ekvationen $\quad y'' + y = x\cos x.$

Komplex förskjutning, övn 9.48 c

Lös ekvationen $\quad y'' + y = x\cos x.$
Lösning: $P(r) = r^2 + 1$

Komplex förskjutning, övn 9.48 c

Lös ekvationen $\quad y'' + y = x\cos x.$
Lösning: $P(r) = r^2 + 1 = 0$

Komplex förskjutning, övn 9.48 c

Lös ekvationen $\quad y'' + y = x\cos x.$

Lösning: $P(r) = r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$

Komplex förskjutning, övn 9.48 c

Lös ekvationen $\quad y'' + y = x\cos x.$
Lösning: $P(r) = r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$ så

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Komplex förskjutning, övn 9.48 c

Lös ekvationen $\quad y'' + y = x\cos x.$
Lösning: $P(r) = r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$ så

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Då $\cos x$ är en del av både y_h och högerledet blir det besvärligt att klura ut vad vi skall ansätta som y_p. Vi skall istället använda den *komplexa exponentialfunktionen* och att

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}.$$

Komplex förskjutning, övn 9.48 c

Lös ekvationen $\quad y'' + y = x\cos x.$
Lösning: $P(r) = r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$ så

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Då $\cos x$ är en del av både y_h och högerledet blir det besvärligt att klura ut vad vi skall ansätta som y_p. Vi skall istället använda den *komplexa exponentialfunktionen* och att

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}.$$

Studera istället den komplexa differentialekvationen

$$Y'' + Y = xe^{ix}$$

Komplex förskjutning, övn 9.48 c

Lös ekvationen $\quad y'' + y = x\cos x.$
Lösning: $P(r) = r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$ så

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Då $\cos x$ är en del av både y_h och högerledet blir det besvärligt att klura ut vad vi skall ansätta som y_p. Vi skall istället använda den *komplexa exponentialfunktionen* och att

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}.$$

Studera istället den komplexa differentialekvationen

$$Y'' + Y = xe^{ix}$$

Eftersom $\quad Y = \operatorname{Re} Y + i \operatorname{Im} Y$ ger linjäriten hos derivatan att $Y' = (\operatorname{Re} Y)' + i(\operatorname{Im} Y)'$

Komplex förskjutning, övn 9.48 c

Lös ekvationen $\quad y'' + y = x\cos x.$
Lösning: $P(r) = r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$ så

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Då $\cos x$ är en del av både y_h och högerledet blir det besvärligt att klura ut vad vi skall ansätta som y_p. Vi skall istället använda den *komplexa exponentialfunktionen* och att

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}.$$

Studera istället den komplexa differentialekvationen

$$Y'' + Y = xe^{ix}$$

Eftersom $\quad Y = \operatorname{Re} Y + i \operatorname{Im} Y$ ger linjäriten hos derivatan att
$Y' = (\operatorname{Re} Y)' + i(\operatorname{Im} Y)' \quad$ och $\quad Y'' = (\operatorname{Re} Y)'' + i(\operatorname{Im} Y)''.$

$y'' + y = x \cos x$

Följaktligen, om Y_p löser $P(D)Y_p = xe^{ix}$ så fås

$y'' + y = x \cos x$

Följaktligen, om Y_p löser $P(D)Y_p = xe^{ix}$ så fås

$$P(D)Y_p = P(D)(\operatorname{Re} Y_p + i \operatorname{Im} Y_p) =$$

$y'' + y = x \cos x$

Följaktligen, om Y_p löser $P(D)Y_p = xe^{ix}$ så fås

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(\operatorname{Re} Y_p + i \operatorname{Im} Y_p) = \\ &= P(D)\left(\operatorname{Re} Y_p\right) + iP(D)\left(\operatorname{Im} Y_p\right) = \end{aligned}$$

$y'' + y = x \cos x$

Följaktligen, om Y_p löser $P(D)Y_p = xe^{ix}$ så fås

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(\operatorname{Re} Y_p + i \operatorname{Im} Y_p) = \\ &= P(D)\left(\operatorname{Re} Y_p\right) + iP(D)\left(\operatorname{Im} Y_p\right) = \\ &= \left[P(r) \text{ har reella koefficienter} \right] = \end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Följaktligen, om Y_p löser $P(D)Y_p = xe^{ix}$ så fås

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(\operatorname{Re} Y_p + i\operatorname{Im} Y_p) = \\ &= P(D)\left(\operatorname{Re} Y_p\right) + iP(D)\left(\operatorname{Im} Y_p\right) = \\ &= \Big[P(r) \text{ har reella koefficienter}\Big] = \\ &= \operatorname{Re}(P(D)Y_p) + i\operatorname{Im}(P(D)Y_p) = \end{aligned}$$

$y'' + y = x \cos x$

Följaktligen, om Y_p löser $P(D)Y_p = xe^{ix}$ så fås

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(\operatorname{Re} Y_p + i \operatorname{Im} Y_p) = \\ &= P(D)\left(\operatorname{Re} Y_p\right) + iP(D)\left(\operatorname{Im} Y_p\right) = \\ &= \Big[P(r) \text{ har reella koefficienter} \Big] = \\ &= \operatorname{Re}(P(D)Y_p) + i \operatorname{Im}(P(D)Y_p) = \\ &= \operatorname{Re}\left(xe^{ix}\right) + i \operatorname{Im}\left(xe^{ix}\right) = \end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Följaktligen, om Y_p löser $P(D)Y_p = xe^{ix}$ så fås

$$\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)(\operatorname{Re} Y_p + i \operatorname{Im} Y_p) = \\
&= P(D)\left(\operatorname{Re} Y_p\right) + iP(D)\left(\operatorname{Im} Y_p\right) = \\
&= \Big[P(r) \text{ har reella koefficienter} \Big] = \\
&= \operatorname{Re}(P(D)Y_p) + i \operatorname{Im}(P(D)Y_p) = \\
&= \operatorname{Re}\left(xe^{ix}\right) + i \operatorname{Im}\left(xe^{ix}\right) = \\
&= x\cos x + ix\sin x
\end{aligned}$$

$y'' + y = x \cos x$

Följaktligen, om Y_p löser $P(D)Y_p = xe^{ix}$ så fås

$$\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)(\operatorname{Re} Y_p + i \operatorname{Im} Y_p) = \\
&= P(D)\left(\operatorname{Re} Y_p\right) + iP(D)\left(\operatorname{Im} Y_p\right) = \\
&= \Big[P(r) \text{ har reella koefficienter}\Big] = \\
&= \operatorname{Re}(P(D)Y_p) + i \operatorname{Im}(P(D)Y_p) = \\
&= \operatorname{Re}\left(xe^{ix}\right) + i \operatorname{Im}\left(xe^{ix}\right) = \\
&= x \cos x + ix \sin x
\end{aligned},$$

d.v.s. $\operatorname{Re} Y_p = y_p$ till den ekvation vi egentligen vill lösa.

$y'' + y = x \cos x$

Följaktligen, om Y_p löser $P(D)Y_p = xe^{ix}$ så fås

$$\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)(\operatorname{Re} Y_p + i \operatorname{Im} Y_p) = \\
&= P(D)\left(\operatorname{Re} Y_p\right) + iP(D)\left(\operatorname{Im} Y_p\right) = \\
&= \left[P(r) \text{ har reella koefficienter}\right] = \\
&= \operatorname{Re}(P(D)Y_p) + i \operatorname{Im}(P(D)Y_p) = \\
&= \operatorname{Re}\left(xe^{ix}\right) + i \operatorname{Im}\left(xe^{ix}\right) = \\
&= x \cos x + ix \sin x
\end{aligned},$$

d.v.s. $\operatorname{Re} Y_p = y_p$ till den ekvation vi egentligen vill lösa.
Återstår att bestämma Y_p.

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix}z(x)$ ger förskjutningsregeln

$y'' + y = x \cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$P(D)Y_p = P(D)(e^{ix} z) = e^{ix} P(D+i)z = xe^{ix} \iff$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix}z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$P(D)Y_p = P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff$$

$$\iff x = P(D+i)z$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix}z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$P(D)Y_p = P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff$$

$$\iff x = P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z =$$

$y'' + y = x \cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$P(D)Y_p = P(D)(e^{ix} z) = e^{ix} P(D+i)z = xe^{ix} \iff$$

$$\iff x = P(D+i)z = ((D+i)^2 + 1)z =$$

$y'' + y = x \cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$P(D)Y_p = P(D)(e^{ix} z) = e^{ix} P(D+i)z = xe^{ix} \iff$$

$$\iff x = P(D+i)z = ((D+i)^2 + 1)z =$$

$$= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z =$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix}z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = \end{aligned}$$

$y'' + y = x \cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

$y'' + y = x \cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix} z) = e^{ix} P(D + i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D + i)z = ((D + i)^2 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x

$y'' + y = x \cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$
\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix} z) = e^{ix} P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\
\iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2 + 1)z = \\
&= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\
&= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'.
\end{aligned}
$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$z = Ax^2 + Bx$$

$y'' + y = x \cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix} z) = e^{ix} P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$z = Ax^2 + Bx \Longrightarrow z' = 2Ax + B$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix}z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$z = Ax^2 + Bx \implies z' = 2Ax + B \implies z'' = 2A$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix}z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$
\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\
\iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\
&= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\
&= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'.
\end{aligned}
$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$
\begin{aligned}
&z = Ax^2 + Bx \Longrightarrow z' = 2Ax + B \Longrightarrow z'' = 2A \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 2A
\end{aligned}
$$

$y'' + y = x \cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix} z) = e^{ix} P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$\begin{aligned} & z = Ax^2 + Bx \implies z' = 2Ax + B \implies z'' = 2A \implies \\ & \implies 2A + 2i(2Ax + B) \end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$
\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\
\iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\
&= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\
&= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'.
\end{aligned}
$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$
\begin{aligned}
&z = Ax^2 + Bx \implies z' = 2Ax + B \implies z'' = 2A \implies \\
&\implies 2A + 2i(2Ax + B) = 4iAx
\end{aligned}
$$

$y'' + y = x \cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix} z) = e^{ix} P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$z = Ax^2 + Bx \implies z' = 2Ax + B \implies z'' = 2A \implies$$
$$\implies 2A + 2i(2Ax + B) = 4iAx + 2(A + iB)$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff \color{red}{x} &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$\begin{aligned} &z = Ax^2 + Bx \implies z' = 2Ax + B \implies z'' = 2A \implies \\ &\implies 2A + 2i(2Ax + B) = 4iAx + 2(A + iB) = \color{red}{x} \end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix}z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$
\begin{aligned}
P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\
\iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\
&= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\
&= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'.
\end{aligned}
$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$
\begin{aligned}
&z = Ax^2 + Bx \implies z' = 2Ax + B \implies z'' = 2A \implies \\
&\implies 2A + 2i(2Ax + B) = 4iAx + 2(A + iB) = x \iff \\
&\iff \begin{cases} 4iA = 1 \iff \\ \\ \end{cases}
\end{aligned}
$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix}z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$z = Ax^2 + Bx \Longrightarrow z' = 2Ax + B \Longrightarrow z'' = 2A \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2A + 2i(2Ax + B) = 4iAx + 2(A + iB) = x \iff$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 4iA = 1 \iff A = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4} \\ \\ \end{array} \right.$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix}z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$z = Ax^2 + Bx \Longrightarrow z' = 2Ax + B \Longrightarrow z'' = 2A \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2A + 2i(2Ax + B) = 4iAx + 2(A + iB) = x \iff$$
$$\iff \begin{cases} 4iA = 1 \iff A = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4} \\ A + iB = 0 \end{cases}$$

$y'' + y = x \cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$\begin{aligned} &z = Ax^2 + Bx \implies z' = 2Ax + B \implies z'' = 2A \implies \\ &\implies 2A + 2i(2Ax + B) = 4iAx + 2(A + iB) = x \iff \\ &\iff \begin{cases} 4iA = 1 \iff A = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4} \\ A + iB = 0 \iff B = -\dfrac{A}{i} \end{cases} \end{aligned}$$

$y'' + y = x \cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix} z) = e^{ix} P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$z = Ax^2 + Bx \implies z' = 2Ax + B \implies z'' = 2A \implies$$
$$\implies 2A + 2i(2Ax + B) = 4iAx + 2(A + iB) = x \iff$$
$$\iff \begin{cases} 4iA = 1 \iff A = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4} \\ A + iB = 0 \iff B = -\dfrac{A}{i} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix}z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$z = Ax^2 + Bx \Longrightarrow z' = 2Ax + B \Longrightarrow z'' = 2A \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2A + 2i(2Ax + B) = 4iAx + 2(A + iB) = x \iff$$
$$\iff \begin{cases} 4iA = 1 \iff A = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4} \\ A + iB = 0 \iff B = -\dfrac{A}{i} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Longrightarrow z = \frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right)$$

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix}z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix}z) = e^{ix}P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2+1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$\begin{aligned} &z = Ax^2 + Bx \implies z' = 2Ax + B \implies z'' = 2A \implies \\ &\implies 2A + 2i(2Ax + B) = 4iAx + 2(A + iB) = x \iff \\ &\iff \begin{cases} 4iA = 1 \iff A = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4} \\ A + iB = 0 \iff B = -\dfrac{A}{i} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \implies z = \frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) \end{aligned}$$

$y'' + y = x \cos x$

Vi får

$y'' + y = x \cos x$

Vi får

$$Y_p = e^{ix} z(x) =$$

$y'' + y = x \cos x$

Vi får

$$Y_p = e^{ix} z(x) = e^{ix} \frac{1}{4} \left(-ix^2 + x \right)$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$\begin{aligned} Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix} \frac{1}{4} \left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\cos x + i \sin x) \left(-ix^2 + x\right) \end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$\begin{aligned} Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix} \frac{1}{4} \left(-ix^2 + x \right) = \\ &= \frac{1}{4} (\cos x + i \sin x) \left(-ix^2 + x \right) = \\ &= \frac{1}{4} \big(x \cos x \end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$\begin{aligned} Y_p &= e^{ix}z(x) = e^{ix}\frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\cos x + i\sin x)\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x\right. \end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$\begin{aligned} Y_p &= e^{ix}z(x) = e^{ix}\frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\cos x + i\sin x)\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x + i\left(\right.\right. \end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$\begin{aligned} Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix}\frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\cos x + i\sin x)\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x + i\left(-x^2\cos x\right.\right. \end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$\begin{aligned} Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix}\frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\cos x + i\sin x)\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x + i\left(-x^2\cos x + x\sin x\right)\right) \end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$\begin{aligned}
Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix}\frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) = \\
&= \frac{1}{4}(\cos x + i\sin x)\left(-ix^2 + x\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x + i\left(-x^2\cos x + x\sin x\right)\right), \\
y_p &=
\end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$\begin{aligned}
Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix}\frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) = \\
&= \frac{1}{4}(\cos x + i\sin x)\left(-ix^2 + x\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x + i\left(-x^2\cos x + x\sin x\right)\right), \\
y_p &= \operatorname{Re} Y_p =
\end{aligned}$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$
\begin{aligned}
Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix} \frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) = \\
&= \frac{1}{4}(\cos x + i\sin x)\left(-ix^2 + x\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x + i\left(-x^2\cos x + x\sin x\right)\right), \\
y_p &= \operatorname{Re} Y_p = \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2 \sin x\right).
\end{aligned}
$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$
\begin{aligned}
Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix}\frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) = \\
&= \frac{1}{4}(\cos x + i\sin x)\left(-ix^2 + x\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x + i\left(-x^2\cos x + x\sin x\right)\right), \\
y_p &= \operatorname{Re} Y_p = \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x\right).
\end{aligned}
$$

Slutligen

$$y = y_h$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$\begin{aligned} Y_p &= e^{ix}z(x) = e^{ix}\frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\cos x + i\sin x)\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x + i\left(-x^2\cos x + x\sin x\right)\right), \\ y_p &= \operatorname{Re} Y_p = \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x\right). \end{aligned}$$

Slutligen

$$y = y_h + y_p$$

$y'' + y = x \cos x$

Vi får

$$
\begin{aligned}
Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix} \frac{1}{4} \left(-ix^2 + x\right) = \\
&= \frac{1}{4} (\cos x + i \sin x) \left(-ix^2 + x\right) = \\
&= \frac{1}{4} \left(x \cos x + x^2 \sin x + i \left(-x^2 \cos x + x \sin x\right) \right), \\
y_p &= \operatorname{Re} Y_p = \frac{1}{4} \left(x \cos x + x^2 \sin x\right).
\end{aligned}
$$

Slutligen

$$y = y_h + y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$y'' + y = x \cos x$

Vi får

$$\begin{aligned} Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix} \frac{1}{4} \left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4} (\cos x + i \sin x) \left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(x \cos x + x^2 \sin x + i \left(- x^2 \cos x + x \sin x\right) \right), \\ y_p &= \operatorname{Re} Y_p = \frac{1}{4} \left(x \cos x + x^2 \sin x\right). \end{aligned}$$

Slutligen

$$y = y_h + y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{4} \left(x \cos x + x^2 \sin x\right)$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$\begin{aligned} Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix} \frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\cos x + i\sin x)\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2 \sin x + i\left(-x^2\cos x + x\sin x\right)\right), \\ y_p &= \operatorname{Re} Y_p = \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2\sin x\right). \end{aligned}$$

Slutligen

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2 \sin x\right) = \\ &= \left(C_1 + \frac{1}{4}x^2\right)\sin x + \left(C_2 + \frac{1}{4}x\right)\cos x \end{aligned}$$