Komplex förskjutning, övn 9.48 c

Lös ekvationen $y'' + y = x\cos x$.
Lösning: $P(r) = r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$ så

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Då $\cos x$ är en del av både y_h och högerledet blir det besvärligt att klura ut vad vi skall ansätta som y_p. Vi skall istället använda den *komplexa exponentialfunktionen* och att

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}.$$

Studera istället den komplexa differentialekvationen

$$Y'' + Y = xe^{ix}$$

Eftersom $Y = \operatorname{Re} Y + i \operatorname{Im} Y$ ger linjäriten hos derivatan att $Y' = (\operatorname{Re} Y)' + i(\operatorname{Im} Y)'$ och $Y'' = (\operatorname{Re} Y)'' + i(\operatorname{Im} Y)''$.

$y'' + y = x\cos x$

Följaktligen, om Y_p löser $P(D)Y_p = xe^{ix}$ så fås

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(\operatorname{Re} Y_p + i \operatorname{Im} Y_p) = \\ &= P(D)\,(\operatorname{Re} Y_p) + iP(D)\,(\operatorname{Im} Y_p) = \\ &= \Big[P(r) \text{ har reella koefficienter} \Big] = , \\ &= \operatorname{Re}(P(D)Y_p) + i \operatorname{Im}(P(D)Y_p) = \\ &= \operatorname{Re}\left(xe^{ix}\right) + i \operatorname{Im}\left(xe^{ix}\right) = \\ &= x\cos x + ix \sin x \end{aligned}$$

d.v.s. $\operatorname{Re} Y_p = y_p$ till den ekvation vi egentligen vill lösa. Återstår att bestämma Y_p.

$y'' + y = x\cos x$

Då $P(r) = r^2 + 1$ och $Y_p = e^{ix} z(x)$ ger förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} P(D)Y_p &= P(D)(e^{ix} z) = e^{ix} P(D+i)z = xe^{ix} \iff \\ \iff x &= P(D+i)z = ((D+i)^2 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD - 1 + 1)z = \\ &= (D^2 + 2iD)z = z'' + 2iz'. \end{aligned}$$

Då z-term saknas måste vi ansätta ett polynom av en grad högre än x, d.v.s.

$$z = Ax^2 + Bx \implies z' = 2Ax + B \implies z'' = 2A \implies$$
$$\implies 2A + 2i(2Ax + B) = 4iAx + 2(A + iB) = x \iff$$
$$\iff \begin{cases} 4iA = 1 \iff A = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4} \\ A + iB = 0 \iff B = -\dfrac{A}{i} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \implies z = \frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right)$$

$y'' + y = x\cos x$

Vi får

$$\begin{aligned} Y_p &= e^{ix} z(x) = e^{ix} \frac{1}{4}\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\cos x + i \sin x)\left(-ix^2 + x\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2 \sin x + i\left(-x^2 \cos x + x \sin x\right)\right), \\ y_p &= \operatorname{Re} Y_p = \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2 \sin x\right). \end{aligned}$$

Slutligen

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{4}\left(x\cos x + x^2 \sin x\right) = \\ &= \left(C_1 + \frac{1}{4}x^2\right)\sin x + \left(C_2 + \frac{1}{4}x\right)\cos x \end{aligned}$$