Dagens ämnen

- Linjära ODE av ordning 2.
- Deriveringsoperatorn D.
- Lösningsstruktur.
- Linjära ODE av ordning 2 med konstanta koefficienter.
  - Homogena lösningen.
  - Partikulärlösningen.

Deriveringsoperatorn D

- $Df(x)$ betyder samma sak som $f'(x)$.
- Liten förskjutning i betydelse.
  - När vi skriver f' har vi deriverat.
  - När vi skriver Df skall vi derivera.

Deriveringsoperatorn D

- Linjäritet
  - $D(f+g) = Df + Dg$,
  - $D(\lambda f) = \lambda Df$, $\lambda =$konstant,
- $f'' = D(f') = D(Df) = D^2 f$,
- $f''' = D(f'') = D(D^2 f) = D^3 f$
- $f^{(n)} = D^n f$

Linjära ODE av ordning 2

- $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$,
- Med D kan ekvationen skrivas

$$
\begin{aligned}
&D^2 y + a(x)Dy + b(x)y = \\
&\quad = \underbrace{\left(D^2 + a(x)D + b(x)\right)}_{=P(D)} y = \\
&\quad = P(D)y = f(x)
\end{aligned}
$$

Linjära ODE av ordning 2

- Linjäriteten hos D gör att D^2 och $P(D)$ blir linjära.
- $P(D)$ kallas en

  linjär differentialoperator

  av ordning 2.

Lösningsstruktur, **SATS 9.1**, sid 395

Samtliga lösningar $y(x)$ till

$$P(D)y(x) = f(x)$$

kan skrivas på formen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

där y_h är en lösning till $P(D)y(x) = 0$ och $y_p(x)$ är ***en*** lösning till $P(D)y(x) = f(x)$.

Terminologi

- y_h kallas den **homogena lösningen** eftersom den är lösning till den **homogena ekvationen** $P(D)y = 0$.
- y_p kallas en **partikulärlösning** till $P(D)y = f(x)$ (jämför engelska ordet **"particular"** som betyder speciell)

Terminologi

- Polynomet $P(r) = r^2 + ar + b$ kallas det

  karakteristiska polynomet

  till operatorn

  $$P(D)y = (D^2 + aD + b)y = y'' + ay' + by.$$

- Ekvationen $P(r) = 0$ kallas den

  karakteristiska ekvationen

  till $P(D)y$.

SATS 9.2, sid 397

Betrakta den homogena ekvationen

$$y'' + ay' + by = P(D)y = 0$$

och låt r_1, r_2 vara nollställena till den karakteristiska ekvationen $P(r) = 0$.
Då ges samtliga lösningar av

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} & \text{om } r_1 \neq r_2 \\ e^{r_1 x}(C_1 x + C_2) & \text{om } r_1 = r_2 \end{cases}$$

Bevis av **SATS 9.2**

Vilka exponentialfunktioner e^{rx} löser ekvationen
$$y'' + ay' + by = P(D)y = 0?$$

$$y = e^{rx} \Longrightarrow D^2 y = D^2(e^{rx}) = D(re^{rx}) = rD(e^{rx}) = r^2 e^{rx}$$

Insättning i ekvationen ger

$$y'' + ay' + by = r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = e^{rx}\underbrace{(r^2 + ar + b)}_{=P(r)} =$$
$$= e^{rx}\, P(r) = 0 \iff P(r) = 0.$$

Följaktligen, $y = e^{rx}$ löser $P(D)y = 0$ omm $P(r) = 0$. Finns det fler lösningar? Ja, linjäriteten ger att $y = Ae^{rx}$, A =konstant löser ekvationen. $P(D)(Ae^{rx}) = AP(D)e^{rx} = A{\cdot}0 = 0$.
Finns det ännu fler varianter?

Bevis av **SATS 9.2**

Antag att r_1, r_2: $P(r_1) = r_1^2 + ar_1 + b = 0$, $P(r_2) = 0$ och sätt $y(x) = e^{r_1 x} z(x)$. Då gäller

$$y' = D(e^{r_1 x} z(x)) = e^{r_1 x}(r_1 z + z')$$
$$y'' = D^2(e^{r_1 x} z(x)) = D(e^{r_1 x}(r_1 z + z')) =$$
$$= e^{r_1 x}(r_1(r_1 z + z') + r_1 z' + z'') =$$
$$= e^{r_1 x}(r_1^2 z + 2r_1 z' + z'')$$

Insättning i ekvationen ger

$$P(D)(e^{r_1 x} z(x)) = y'' + ay' + by =$$
$$= e^{r_1 x}(r_1^2 z + 2r_1 z' + z'') + a(e^{r_1 x}(r_1 z + z')) + be^{r_1 x} z =$$
$$= e^{r_1 x}(z'' + z'(2r_1 + a) + z\underbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)}_{=P(r_1)=0}) =$$
$$= e^{r_1 x}(z'' + z'(2r_1 + a)) = 0 \iff$$
$$\iff z'' + z'(2r_1 + a) = 0$$

Bevis av **SATS 9.2**

Sambandet mellan rötter och koefficienter (Grunken!) ger

$$a = -(r_1 + r_2) \Longrightarrow 2r_1 + a = 2r_1 - r_1 - r_2 = r_1 - r_2.$$

Hjälpekvationen är alltså $z'' + (r_1 - r_2)z' = 0$. Sätt $u(x) = z'(x)$.
Då fås ekvationen $u' + (r_1 - r_2)u = 0$ som är en linjär ODE av ordning 1! Lösningen till denna kan vi, den är

$$u = Ae^{(r_2 - r_1)x} = z'.$$

Återstår att integrera z'. Två fall: (a) $r_1 \neq r_2$. (b) $r_1 = r_2$.

Bevis av **SATS 9.2**

(a) $r_1 \neq r_2 \Longrightarrow z = A \int e^{(r_2-r_1)x} dx = \underbrace{\frac{A}{r_2 - r_1}}_{C_2} e^{(r_2-r_1)x} + C_1 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow y = e^{r_1 x} z = e^{r_1 x}(C_1 + C_2 e^{(r_2-r_1)x}) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

(b) $r_1 = r_2 \Longrightarrow u = z' = A = C_1 \Longrightarrow z = C_1 x + C_2$

$$\Longrightarrow y = e^{r_1 x} z = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}$$

VSB!

SATS 9.2, sid 397

Betrakta den homogena ekvationen

$$y'' + ay' + by = P(D)y = 0$$

och låt r_1, r_2 vara nollställena till den karakteristiska ekvationen $P(r) = 0$.
Då ges samtliga lösningar av

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} & \text{om } r_1 \neq r_2 \\ e^{r_1 x}(C_1 x + C_2) & \text{om } r_1 = r_2 \end{cases}$$

Om r_1 och r_2 är komplexa??

Om $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ så blir

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Svara alltid på denna form!
Använd bara formen

$$y_h = A e^{(\alpha + i\beta)x} + B e^{(\alpha - i\beta)x}$$

om det behövs som mellanled. Lösningarna till en ***reell*** differentialekvation skall uttryckas på ***reell*** form.

Partikulärlösningar

$$y'' + ay' + by = P(D)y = h(x)$$

De högerled $h(x)$ vi skall hantera är

1. $h(x)$ =polynom
2. $h(x) = e^{\alpha x}$
3. $h(x) = \sin \beta x$, $\cos \beta x$
4. Summor och produkter av 1.-3.

Tänk: "Hur skall jag välja y för att $P(D)y$ skall bli av samma typ som det sökta högerledet?"

Begynnelsevillkor, randvillkor

- ODE av ordning 1: En fri konstant. Behöver ett villkor för att bestämma konstanten, typ

$$y(a) = b.$$

- ODE av ordning 2: Två fria konstanter. Behöver två villkor för att bestämma konstanterna, typ

$$\begin{cases} y(a) = b, \\ y(c) = d \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} y(a) = b, \\ y'(c) = d \end{cases}$$