Dagens ämnen

- Deriveringsoperatorn D.
- Förskjutningsregeln.
- Linjära ODE av ordning n med konstanta koefficienter

Deriveringsoperatorn D

- $Df(x)$ betyder samma sak som $f'(x)$.
- Liten förskjutning i betydelse.
  - När vi skriver f' har vi deriverat.
  - När vi skriver Df skall vi derivera.

Deriveringsoperatorn D

- Linjäritet
  - $D(f+g) = Df + Dg$,
  - $D(\lambda f) = \lambda Df$, $\lambda =$konstant,
- $f'' = D(f') = D(Df) = D^2 f$,
- $f''' = D(f'') = D(D^2 f) = D^3 f$
- $f^{(n)} = D^n f$

Linjära ODE av ordning 2

- $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$,
- Med D kan ekvationen skrivas

$$\begin{aligned} &D^2 y + a(x)Dy + b(x)y = \\ &\quad = \underbrace{\left(D^2 + a(x)D + b(x)\right)}_{=P(D)} y = \\ &\quad = P(D)y = f(x) \end{aligned}$$

Linjära ODE av ordning n

- $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$,
- Med D kan ekvationen skrivas

$$D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \ldots + a_1 Dy + a_0 y =$$
$$= \underbrace{\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)}_{=P(D)} y =$$
$$= P(D)y = f(x)$$

Linjära ODE av ordning n

- Linjäriteten hos D gör att D^n och $P(D)$ blir linjära.
- $P(D)$ kallas en

linjär differentialoperator

av ordning n.

Förskjutningsregeln, Sats 9.3, sid 411

Om a är konstant och $f(x)$ är deriverbar n gånger så gäller

$$D^n(f(x)e^{ax}) = e^{ax}(D + a)^n f(x).$$

Linjäriteten $\Rightarrow$

$$P(D)(f(x)e^{ax}) = e^{ax}P(D + a)f(x).$$

Varför? Mekaniserar kalkylen.
Produktderiveringar blir polynomkalkyl.

Lösningsstruktur, som **SATS 9.1**, sid 395

Samtliga lösningar $y(x)$ till

$$P(D)y(x) = f(x)$$

kan skrivas på formen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

där y_h är en lösning till $P(D)y(x) = 0$ och $y_p(x)$ är ***en*** lösning till $P(D)y(x) = f(x)$.

Linjära ODE av ordning n

Antag $P(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + r^n$ har nollställena $r_1, \ldots, r_k$ med multipliciteter $m_1, \ldots, m_k$ (≥ 1 och $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$).

Då kan vi skriva (Faktorsatsen, Sats 1.2, sid 28)

$$P(r) = (r - r_1)^{m_1} \cdot (r - r_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (r - r_k)^{m_k}.$$

Ger att y_h får samma struktur som tidigare.

SATS 9.2, sid 397

Betrakta den homogena ekvationen

$$y'' + ay' + by = P(D)y = 0$$

och låt r_1, r_2 vara nollställena till den karakteristiska ekvationen $P(r) = 0$.
Då ges samtliga lösningar av

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} & \text{om } r_1 \neq r_2 \\ e^{r_1 x}(C_1 x + C_2) & \text{om } r_1 = r_2 \end{cases}$$

Sats 9.4, sid 412

Om $P(r) = 0$ har lösningarna $r_1, r_2, \ldots, r_k$ med multipliciteter $m_1, m_2, \ldots, m_k$ så har $P(D)y = 0$ lösningarna

$$y(x) = p_1(x)e^{r_1 x} + \ldots + p_k(x)e^{r_k x}$$

där p_j är godtyckliga polynom av gradtal $\leq m_j - 1$.