Exempel 3

Är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{k} - \tan \frac{1}{k} \right)$$

konvergent eller divergent?

Exempel 3

Är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{k} - \tan \frac{1}{k} \right)$$

konvergent eller divergent?

Lösning: Både

$$\sin \frac{1}{k} \quad \text{och} \quad \tan \frac{1}{k} \to 0$$

då $k \to \infty$

Exempel 3

Är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{k} - \tan \frac{1}{k} \right)$$

konvergent eller divergent?
Lösning: Både

$$\sin \frac{1}{k} \quad \text{och} \quad \tan \frac{1}{k} \to 0$$

då $k \to \infty$ så Divergenstestet ger inget.

Exempel 3

Är

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{k}-\tan\frac{1}{k}\right)$$

konvergent eller divergent?
Lösning: Både

$$\sin\frac{1}{k}\quad \text{och}\quad \tan\frac{1}{k}\to 0$$

då $k\to\infty$ så Divergenstestet ger inget. För att kunna svara på frågan måste vi få koll på *hur fort* termerna går mot noll.

Exempel 3

Är
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{k} - \tan \frac{1}{k} \right)$$
konvergent eller divergent?
Lösning: Både
$$\sin \frac{1}{k} \quad \text{och} \quad \tan \frac{1}{k} \to 0$$
då $k \to \infty$ så Divergenstestet ger inget. För att kunna svara på frågan måste vi få koll på *hur fort* termerna går mot noll.

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k}$$

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}}$$

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\Bigg(1$$

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right)$$

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= \sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k} - 1}{\cos\frac{1}{k}}$$

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= \sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k} - 1}{\cos\frac{1}{k}} \stackrel{*}{=} \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}$$

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= \sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k}-1}{\cos\frac{1}{k}} \stackrel{*}{=} \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)$$

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= \sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k} - 1}{\cos\frac{1}{k}} \stackrel{*}{=} \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right) - 1\right)$$

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= \sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k} - 1}{\cos\frac{1}{k}} \overset{*}{=} \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right) - 1\right) =$$

$$= \underset{b_k}{\frac{1}{k^3}}$$

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right) = \\
&= \sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k}-1}{\cos\frac{1}{k}} \overset{*}{\doteq} \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2k^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)-1\right) = \\
&= \underset{b_k}{\frac{1}{k^3}}\,\frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= \sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k} - 1}{\cos\frac{1}{k}} \overset{*}{=} \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right) - 1\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k^3}}_{b_k}\,\frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= \sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k} - 1}{\cos\frac{1}{k}} \overset{*}{=} \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right) - 1\right) =$$

$$= \underset{b_k}{\frac{1}{k^3}}\,\frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) < 0$$

enligt ledet före den *-märkta likheten,

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right) = \\
&= \sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k}-1}{\cos\frac{1}{k}} \overset{*}{=} \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2k^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)-1\right) = \\
&= \underbrace{\frac{1}{k^3}}_{b_k}\,\frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) < 0
\end{aligned}
$$

enligt ledet före den *-märkta likheten, $\cos\frac{1}{k}-1 \leq 0$.

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right) = \\
&= \sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k}-1}{\cos\frac{1}{k}} \overset{*}{=} \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2k^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)-1\right) = \\
&= \underbrace{\frac{1}{k^3}}_{b_k}\,\frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) < 0
\end{aligned}
$$

enligt ledet före den *-märkta likheten, $\cos\frac{1}{k}-1 \leq 0$. Följaktligen är termerna inte positiva

Exempel 3

Fortsätter med diverse omskrivningar och Maclaurinutveckling:

$$a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k} = \sin\frac{1}{k} - \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = \sin\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= \sin\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{1}{k}-1}{\cos\frac{1}{k}} \stackrel{*}{=} \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2k^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)-1\right) =$$

$$= \underset{b_k}{\frac{1}{k^3}}\,\frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) < 0$$

enligt ledet före den *-märkta likheten, $\cos\frac{1}{k}-1 \le 0$. Följaktligen är termerna inte positiva så jämförelsesatserna kan inte användas.

Exemple 3

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet.

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,

$$\frac{-a_k}{b_k}$$

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,

$$\frac{-a_k}{b_k} = \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,

$$\frac{-a_k}{b_k} = \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \to \frac{1}{2}$$

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,

$$\frac{-a_k}{b_k} = \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \to \frac{1}{2} > 0$$

då $k \to \infty$.

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,

$$\frac{-a_k}{b_k} = \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \to \frac{1}{2} > 0$$

då $k \to \infty$. Då

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k = \frac{1}{k^3}\right)$$

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,

$$\frac{-a_k}{b_k} = \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \to \frac{1}{2} > 0$$

då $k \to \infty$. Då

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k = \frac{1}{k^3}\right)$$

är konvergent

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,

$$\frac{-a_k}{b_k} = \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \to \frac{1}{2} > 0$$

då $k \to \infty$. Då

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k = \frac{1}{k^3}\right)$$

är konvergent enligt sats 10.5 ($\alpha = 3 > 1$)

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,

$$\frac{-a_k}{b_k} = \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \to \frac{1}{2} > 0$$

då $k \to \infty$. Då

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k = \frac{1}{k^3}\right)$$

är konvergent enligt sats 10.5 ($\alpha = 3 > 1$) ger jämförelse på kvotform att $\sum_{k=0}^{\infty}(-a_k)$ är konvergent

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,

$$\frac{-a_k}{b_k} = \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \to \frac{1}{2} > 0$$

då $k \to \infty$. Då

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k = \frac{1}{k^3}\right)$$

är konvergent enligt sats 10.5 ($\alpha = 3 > 1$) ger jämförelse på kvotform att $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-a_k)$ är konvergent och därmed att

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k}\right)$$

Exempel 3

I detta fall är det ju dock en formalitet. Då alla termer är negativa så studerar vi istället $-a_k$ som ju är positiv för alla k,

$$\frac{-a_k}{b_k} = \frac{1}{\cos\frac{1}{k}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \to \frac{1}{2} > 0$$

då $k \to \infty$. Då

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k = \frac{1}{k^3}\right)$$

är konvergent enligt sats 10.5 ($\alpha = 3 > 1$) ger jämförelse på kvotform att $\sum_{k=0}^{\infty}(-a_k)$ är konvergent och därmed att

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k = \sin\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k}\right) \qquad \text{är konvergent.}$$