Exempel 6

Bestäm alla reella x sådana att

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{4^k(k-1)} x^{2k}$$

konvergerar.

Lösning: Sätt $a_k = (\ln k)^2 x^{2k}/4^k(k-1)$. Rotkriteriet ger

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(\frac{|x|^{2k}}{4^k}\right)^{1/k} \cdot \left(\frac{(\ln k)^2}{k-1}\right)^{1/k} = \frac{|x|^2}{4} \cdot e^{\frac{2\ln(\ln k)}{k}} \cdot e^{-\frac{\ln(k-1)}{k}} \to$$
$$\to \frac{|x|^2}{4} \cdot e^0 = \frac{|x|^2}{4} = Q$$

då $k \to \infty$. Enligt rotkriteriet är serien absolutkonvergent om $Q < 1$, d.v.s. om $|x| < 2$, och divergent om $Q > 1$, d.v.s. om $|x| > 2$; således är konvergensradien $R = 2$.

Exempel 6

Det återstår att undersöka ändpunkterna $x = \pm R = \pm 2$. Där får vi, i båda punkterna, samma positiva serie:

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_k = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{4^k(k-1)} (\pm 2)^{2k} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{k-1}.$$

Då vi endast har k i nämnaren är en rimlig hypotes att serien divergerar. Eftersom $\ln k \geq \ln 3 > \ln e = 1$ gör vi kvoten mindre genom att minska täljaren och öka nämnaren,

$$a_k = \frac{(\ln k)^2}{k-1} \geq \frac{1}{k}, \qquad k \geq 3.$$

Då $\sum_{k=3}^{\infty}(1/k)$ är divergent ($\alpha = 1$) ger jämförelsesatsen att $\sum_{k=3}^{\infty} a_k$ är divergent, d v s potensserien konvergerar omm $-2 < x < 2$.