Exempel 7

Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

är konvergent. Visa även att $f\left(\sqrt{3}\right) \geq \frac{349}{72}$.

Lösning: Vi använder kvotkriteriet:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+3}{n^3} \frac{x^{2n}}{3^n}, \\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left| \frac{((n+1)+3)}{(n+1)^3} \frac{x^{2(n+1)}}{3^{n+1}} \Big/ \frac{n+3}{n^3} \frac{x^{2n}}{3^n} \right| = \\ &= \frac{n+4}{n+3} \frac{n^3}{(n+1)^3} \left| \frac{x^{2n+2}}{x^{2n}} \right| \frac{3^n}{3^{n+1}} \to \frac{|x|^2}{3} \end{aligned}$$

då $n \to \infty$.

Exempel 7

Enligt kvotkriteriet är serien konvergent om

$$Q = \frac{|x|^2}{3} < 1 \iff |x| < \sqrt{3}$$

och divergent om $|x| > \sqrt{3}$. Alltså har vi konvergensradie $\sqrt{3}$. Insättning av $x = \pm\sqrt{3}$ ger serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3} \frac{(\pm\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent ger jämförelsesatsen att potensserien konvergerar också för $x = \pm\sqrt{3}$. Alltså konvergerar serien då $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

Exempel 7

Slutligen, eftersom alla termer är positiva för alla $x \in \mathbb{R}$, är potensserien större än var och en av dess delsummor. Skriver vi ut några termer med $x = \sqrt{3}$ insatt, observerar vi

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3} \frac{(\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3} = \\ &= \frac{1+3}{1} + \frac{2+3}{8} + \frac{3+3}{27} + \ldots = 4 + \frac{5}{8} + \frac{2}{9} + \ldots = \\ &= \frac{4 \cdot 72 + 5 \cdot 9 + 2 \cdot 8}{72} + \ldots = \frac{288 + 45 + 16}{72} + \ldots > \frac{349}{72}. \end{aligned}$$

VSB