Exempel 9

Bestäm lösningen till ekvationen

$$y'' - 2xy' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

i form av en potensserie.
Lösning: Vi skall lösa ekvationen på två sätt.
Alternativ 1: Vi utnyttjar att ekvationen är linjär av *1:a ordningen* i y'. Integrerande faktorn är e^{-x^2} så efter att ekvationen multiplicerats med denna fås

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y'\right) = 0 \iff e^{-x^2}y' = C \iff y' = Ce^{x^2}$$

$$y'(0) = 1 = Ce^0 = C \iff C = 1 \Longrightarrow$$

$$y'(x) = e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

och serien är konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$.

Exempel 9: $y'' - 2xy' = 0$

Integration av potensserien ger

$$y(x) = \int e^{x^2}dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\int x^{2k}dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} + C, \quad y(0) = 0 = C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}$$

och denna potensserie har samma konvergensradie, $R = \infty$, enligt Sats 10.16.

Exempel 9: $y'' - 2xy' = 0$

Alternativ2: Antag att ekvationen har en lösning på formen $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ och att denna konvergerar för $|x| < R$ för något $R > 0$. Derivering och insättning i ekvationen ger

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} \Longrightarrow y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} \Longrightarrow$$

$$y'' - 2xy' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k.$$

Exempel 9: $y'' - 2xy' = 0$

För att kunna skriva seriernas summa som *en* potensserie skriver vi om serien för y''.

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} = \begin{bmatrix} k-2 = n \\ k = 2 \iff n = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y'' - 2xy' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k =$$

$$= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(((k+2)(k+1)c_{k+2} - 2kc_k)\, x^k\right) = 0 \iff$$

$$\iff c_2 = 0, \quad (k+2)(k+1)c_{k+2} - 2kc_k = 0,\ k \geq 1.$$

Exempel 9: $y'' - 2xy' = 0$

Vi får då

$$c_{k+2} = \frac{2k}{(k+2)(k+1)} c_k.$$

Då $y(0) = c_0 = 0$, $c_2 = 0$ ger $c_4 = \dfrac{2\cdot 2}{(2+2)(2+1)} c_2 = 0$ så $c_{2k} = 0$ för alla $k \geq 0$.
För udda $k = 2n-1$ kan rekursionsformeln skrivas

$$c_{(2n-1)+2} = c_{2n+1} = \frac{2(2n-1)}{((2n-1)+2)((2n-1)+1)} c_{2n-1} = \\ = \frac{2(2n-1)}{(2n+1)(2n)} c_{2n-1} = \frac{2n-1}{(2n+1)n} c_{2n-1}$$

Exempel 9: $y'' - 2xy' = 0$

Med $y'(0) = 1 = c_1$, $\quad c_{2n+1} = \dfrac{2n-1}{(2n+1)n} c_{2n-1}$ fås

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{n=1}}: &\quad c_3 = \frac{2-1}{(2+1)\cdot 1} c_1 = \frac{1}{3}, \\
\underline{\underline{n=2}}: &\quad c_5 = \frac{3}{5\cdot 2} c_3 = \frac{1}{5\cdot 2}, \\
\underline{\underline{n=3}}: &\quad c_7 = \frac{5}{7\cdot 3} c_5 = \frac{1}{7\cdot 2\cdot 3}, \\
\underline{\underline{n=4}}: &\quad c_9 = \frac{7}{9\cdot 5} c_7 = \frac{1}{9\cdot 2\cdot 3\cdot 4},
\end{aligned}$$

$$c_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)n!} \Longrightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} x^{2n+1}$$

och kvotkriteriet ger på vanligt sätt $R = \infty$.

Exempel 9: $y'' - 2xy' = 0$

Det är inte nödvändigt att hitta ett uttryck för koefficienterna på det sätt vi gjorde nu. Det viktiga är att man ändå kan beräkna konvergensradien med hjälp av rekursionsformeln och kvotkriteriet. Med $a_n = c_{2n+1}x^{2n+1}$ fås

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{c_{2(n+1)+1}x^{2(n+1)+1}}{c_{2n+1}x^{2n+1}}\right| = \left|\frac{c_{2n+3}}{c_{2n+1}}\right| \left|\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}}\right| = \\ = \begin{bmatrix}\text{Byt } n \text{ mot } n+1 \\ \text{i rekursionsformeln}\end{bmatrix} = |x|^2 \frac{2(n+1)-1}{(2(n+1)+1)(n+1)} = \\ = |x|^2 \frac{2n+1}{(2n+3)(n+1)} \to 0 < 1$$

då $n \to \infty$, d v s serien konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$.