Dagens ämnen

- Numeriska serier
- Definition av konvergens
- Jämförelsesatser
- Vad skall vi jämföra med?
- Absolutkonvergens
  - Leibniz kriterium

Numeriska serier

- I princip samma teori som för genegraler
- Vad skall vi mena med $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?
- Studerar ***delsummorna*** $\displaystyle s_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$
- Vad händer med dessa då $N \to \infty$?

Definition 10.1, sid 436

Om gränsvärdet

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k$$

existerar, dvs om

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k = S \in \mathbb{R}$$

så säges $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vara konvergent och ha värdet S.

Numeriska serier

- Hur känner man igen konvergens?
- **Sats 10.1**, sid436

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konvergent} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

- OBS! Håll ordning på logiken! Det är $\implies$ ***INTE*** $\iff$!!. DVS att termerna går mot noll innebär INTE att serien är konvergent.

Divergenskriteriet

- Konvergens kräver att termerna går mot noll.
- Negera påståendet i föregående sats.
- Då fås:

  Om termerna ***INTE*** går mot noll så är serien ***INTE*** konvergent, d v s divergent.

Numeriska serier

- Hur visar man konvergens då?
- I princip samma teori som för genegraler.
- Sats 10.4 (Integralkriteriet), sid 442: Antag att f är avtagande för $x \geq 1$. Då gäller

$$\int_1^\infty f(x)dx \quad \text{konvergent}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \quad \text{konvergent}$$

Integralkriteriet

- Beviset av integralkriteriet bygger på följande sats:
- Sats A.1, sid 479

  Om a_n, $n = 1, 2, \ldots,$ är en växande uppåt begränsad talföljd så existerar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ som ett reellt tal.

Sats 10.11, sid 456 (Jämförelsesats I)

Antag att $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Då gäller:

(a) om $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ är konvergent så är

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ är konvergent

(b) om $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ är divergent så är

$\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ är divergent

Sats 10.6, sid 443-444 (Jämförelsesats I)

Antag att $0 \leq a_k \leq b_k$. Då gäller:

(a) om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

(b) om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent så är $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent

Jämförelsesats för positiva serier

Läs satsen i ord istället för i formler:

(a) Om den ***större*** serien är ***konvergent*** så är den mindre serien också konvergent.

(b) Om den ***mindre*** serien är ***divergent*** så är den ***större*** serien också ***divergent***.

Vad skall vi jämföra med?

Sats 10.12, sid 456

(a) $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{är} \begin{cases} \text{konvergent om } \alpha > 1 \\ \text{divergent} \quad \text{om } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(b) $$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{är} \begin{cases} \text{konvergent om } \alpha < 1 \\ \text{divergent} \quad \text{om } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Vad skall vi jämföra med?

Sats 10.5, sid 442

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots$$

$$\text{är} \begin{cases} \text{konvergent om } \alpha > 1 \\ \text{divergent} \quad \text{om } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Jämförelse på (slapp) kvotform

Sats 10.13, sid 458

$f, g \geq 0$. Om $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to A > 0$ då $x \to$ problemet.

Då gäller: $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ konvergent $\iff$

$\iff \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ konvergent

Jämförelse på (slapp) kvotform

Sats 10.7, sid 446

$a_k, b_k \geq 0$. Om $\dfrac{a_k}{b_k} \to A > 0$ då $k \to \infty$.

Då gäller: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\iff$

$\iff \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent

Användning av jämförelsesatserna

- Se konvergensfrågan som **TVÅ** frågor:
  1. Är integralen vi undersöker konvergent?
  2. Är integralen vi jämför med konvergent?
- Om förutsättningarna i den jämförelsesats du vill använda är uppfyllda så säger den att de två frågorna har **SAMMA SVAR!**
- Vi vet svaret för jämförelseintegralen!
- Därmed ger jämförelsesatsen att svaret på konvergensfrågan är detsamma för den integral vi vill undersöka.

Användning av jämförelsesatserna

Din redovisning måste därför **TYDLIGT** visa att **FÖRUTSÄTTNINGARNA** i jämförelsesatsen är uppfyllda.
Därför blir det också viktigt att du använder korrekta beteckningar och korrekt terminologi.

Absolutkonvergens

- Jämförelsesatserna kräver att $f \geq 0$.
- Vad gör vi om f växlar tecken?
- Studera $|f|$.

Definition. Om $\int_a^b |f(x)|dx$ är konvergent sägs $\int_a^b f(x)dx$ vara absolutkonvergent (och förstås konvergent).

Sats 10.9, sid 450

Systematiserad jämförelse med geometrisk serie.

Rotkriteriet: $\sqrt[k]{|a_k|} \to Q$ då $k \to \infty$

Kvotkriteriet: $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to Q$ då $k \to \infty$

$$0 \leq Q < 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ är absolutkonvergent.}$$

$$Q > 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ är divergent.}$$

Sats 10.10, sid 452 Leibniz kriterium

Alternerande serie, varannan $+$, varannan $-$.

Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är alternerande och

(a) $a_k \to 0$ då $k \to \infty$

(b) $|a_k| \geq |a_{k+1}|$ för alla k

så är serien konvergent.

Sats 10.10, sid 452 Leibniz kriterium

Bättre i ord!

Om serien är alternerande och termernas belopp ***avtar*** mot noll så är serien konvergent.

Felet då en Leibnizkonvergent serie approximeras med en delsumma är mindre än den första utelämnade termen.

Sammanfattning

- Termerna går inte mot noll $\Longrightarrow$ divergens.
- Jämför med $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
  Konvergent om $\alpha > 1$, divergent annars.
- Integralkriteriet och jämförelsesatserna
- Rot- och kvotkriteriet $\iff$ jämförelse med geometrisk serie
- Leibniz kriterium: Alternerande, termernas belopp avtar mot noll $\Longrightarrow$ konvergens