Dagens ämnen

- Maclaurinserier
- Lösning av ODE med potensserier

Maclaurinserier

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_{n+1}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{n!} + r_{n+1}(x)$$

$$r_{n+1}(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \to 0$$

för varje fixt x då $n \to \infty$.

Maclaurinserier

Följaktligen gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ att

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Gör på samma sätt för alla de andra standardutvecklingarna.

Maclaurinserier

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \qquad -1 < x \leq 1$$

Maclaurinserier

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad -1 < x < 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad -1 \leq x \leq 1$$

Följer ur entydighetssatsen för Maclaurinutvecklingar att om $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ så är $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Maclaurinserier

Om serien konvergerar i någon av konvergensintervallets ändpunkter så konvergerar den mot funktionsvärdet.
Detta ger, t ex att

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\ln(1+1) = \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Maclaurinserier

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots$$

Maclaurinserier

$$\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = {\color{red}\frac{3}{2}\ln 2 =}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots + \\
&\quad + \frac{1}{2} \quad - \frac{1}{4} \quad + \frac{1}{6} \quad - \frac{1}{8} \quad + \frac{1}{10} - \dots = \\
&= 1 \quad + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \quad + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \quad + \dots = \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots = {\color{red}\ln 2}
\end{aligned}$$

Maclaurinserier

$$\frac{3}{2}\ln 2 = \ln 2 \quad ???$$

Att det blir på detta sätt beror på att Maclaurin-serien för $\ln(1+x)$ är konvergent men INTE absolutkonvergent för $x = 1$.
En sådan serie kallas ***betingat konvergent*** och i sådana får man inte stuva om bland termerna som man vill.
Det får man i absolutkonvergenta serier.