

Exempel 1

Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x e^{1/x} - x^2 \sin \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{|1-x^2|} + x^7}{x^4 + x^7}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x - \sqrt{|1-x^2|} + x^7}{x^4 + x^7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = ?$$

Vi börjar med att sätta på gemensamt bråk och utnyttja standardgränsvärden för att slippa utveckla så många termer.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \arctan x}{\arctan x \ln(1+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \arctan x}{\frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{\arctan x}{x} \cdot x^2} = \left[\begin{array}{l} \text{räknerregler för} \\ \text{gränsvärden} \end{array} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \arctan x}{x^2}. \end{aligned}$$

Gör vi på detta sätt får vi också direkt svar på hur långt vi behöver utveckla termerna i täljaren, i detta fall till grad 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = ?$$

Maclaurinutveckling t.o.m. ordning 2, dvs med restterm av grad 3 ger

$$\left. \begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3) \\ \arctan x &= x + \mathcal{O}(x^3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\ln(1+x) - \arctan x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3) - (x + \mathcal{O}(x^3))}{x^2} =$$

$$\frac{-\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x) \rightarrow -\frac{1}{2}$$

då $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x e^{1/x} - x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = ?$$

Sätt $t = \frac{1}{x}$. Observera att då $x \rightarrow \infty$ så $t \rightarrow 0^+$ eftersom $\frac{1}{x} > 0$. Vi kan ju bara gå mot ∞ från ett håll. Vi får

$$\begin{aligned} x e^{1/x} &= \frac{1}{t} e^t = \frac{1}{t} \left(1 + t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} t^3 + \mathcal{O}(t^4) \right) = \\ &= \frac{1}{t} + 1 + \mathcal{O}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \sin \frac{1}{x} &= \frac{1}{t^2} \sin t = \frac{1}{t^2} \left(t - \frac{1}{6} t^3 + \mathcal{O}(t^5) \right) = \\ &= \frac{1}{t} + \mathcal{O}(t). \end{aligned}$$

Då det räcker med en nollskild term och restterm ser vi att kan stanna utvecklingarna redan vid $\mathcal{O}(t)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x e^{1/x} - x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = ?$$

Vi får

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x e^{1/x} - x^2 \sin \frac{1}{x} \right) &= \left[x \rightarrow \infty \iff t = 1/x \rightarrow 0^+ \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} e^t - \frac{1}{t^2} \sin t \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} + 1 + \mathcal{O}(t) - \frac{1}{t} + \mathcal{O}(t) \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (1 + \mathcal{O}(t)) = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{|1 - x^2|} + x^7}{x^4 + x^7}$$

Då $x \rightarrow 0$ kan vi ta bort beloppet innanför rottecknet; om $x \rightarrow 0$ så måste ju x^2 förr eller senare vara mindre än 1. Vidare, då x är litet dominerar x^4 över x^7 i nämnaren. För att vi då skall kunna få ut nåt ur detta måste vi utveckla t.o.m. ordning 4. Vi får

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6),$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - x^2} &= (1 - x^2)^{1/2} = \left[\text{tänk } t = -x^2 \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \binom{1/2}{2} (-x^2)^2 + \mathcal{O}\left((-x^2)^3\right) = \\ &= \left[\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2} = -\frac{1}{8} \right] = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{|1 - x^2|} + x^7}{x^4 + x^7}$$

Insättning av utvecklingarna ger täljaren

$$\begin{aligned} T: \quad & \cos x - \sqrt{|1 - x^2|} + x^7 = \\ & = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right) + x^7 = \\ & = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^6) + x^7 = \frac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^6) \end{aligned}$$

$$N: \quad x^4 + x^7$$

$$\frac{T}{N} = \frac{\frac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^6)}{x^4 + x^7} = \frac{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)}{1 + x^3} \rightarrow \frac{1}{6}$$

då $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x - \sqrt{|1 - x^2|} + x^7}{x^4 + x^7}$$

Kuggfråga! Hör ju hemma i Envariabelanalys, del 1. Bryt ut x^2 ur rotuttrycket och x^7 i täljare och nämnare eftersom det är den som är dominant då x är stort. Vi får

$$\frac{\cos x - \sqrt{|1 - x^2|} + x^7}{x^4 + x^7} = \frac{\frac{\cos x}{x^7} + \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x^6} + 1}{1 + \frac{1}{x^3}} \rightarrow 1$$

då $x \rightarrow \infty$.