Exempel 2

Exempel 2

Låt $f(x) = \cos(\mathrm{e}^x - 1)$.

Exempel 2

Låt $f(x) = \cos(e^x - 1)$.

- (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till $f(x)$ med restterm $\mathcal{O}(x^4)$.

Exempel 2

Låt $f(x) = \cos(e^x - 1)$.

- (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till $f(x)$ med restterm $\mathcal{O}(x^4)$.
- (b) Använd resultatet i (a) för att beräkna
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(e^x - 1) - 1 + x^2/2}{x^3}.$$

Exempel 2

Låt $f(x) = \cos(e^x - 1)$.

- (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till $f(x)$ med restterm $\mathcal{O}(x^4)$.
- (b) Använd resultatet i (a) för att beräkna $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x - 1) - 1 + x^2/2}{x^3}.$$
- (c) Använd resultatet i (a) för att avgöra om $f(x)$ har ett lokalt extremvärde i $x = 0$

Exempel 2

Låt $f(x) = \cos(e^x - 1)$.

a. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till $f(x)$ med restterm $\mathcal{O}(x^4)$.
b. Använd resultatet i (a) för att beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x - 1) - 1 + x^2/2}{x^3}.$$
c. Använd resultatet i (a) för att avgöra om $f(x)$ har ett lokalt extremvärde i $x = 0$ (och ange i så fall vilken typ).

Exempel 2

Låt $f(x) = \cos(\mathrm{e}^x - 1)$.

- (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till $f(x)$ med restterm $\mathcal{O}(x^4)$.
- (b) Använd resultatet i (a) för att beräkna
  $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\mathrm{e}^x - 1) - 1 + x^2/2}{x^3}.$$
- (c) Använd resultatet i (a) för att avgöra om $f(x)$ har ett lokalt extremvärde i $x = 0$ (och ange i så fall vilken typ).

Exempel 2.a

Exempel 2.a

Börjar alltid inifrån!

Exempel 2.a

Börjar alltid inifrån! Skulle till $\mathcal{O}\left(x^4\right)$ så vi kör dit först

Exempel 2.a

Börjar alltid inifrån! Skulle till $\mathcal{O}(x^4)$ så vi kör dit först

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) \iff e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

Exempel 2.a

Börjar alltid inifrån! Skulle till $\mathcal{O}(x^4)$ så vi kör dit först

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) \iff e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

och vi ser att $e^x - 1 \to 0$ ungefär som $x \to 0$.

Exempel 2.a

Börjar alltid inifrån! Skulle till $\mathcal{O}(x^4)$ så vi kör dit först

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) \iff e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

och vi ser att $e^x - 1 \to 0$ ungefär som $x \to 0$. Detta innebär att när vi utvecklar $\cos t$ med $t = e^x - 1 \approx x$ så behöver vi gå till

Exempel 2.a

Börjar alltid inifrån! Skulle till $\mathcal{O}\big(x^4\big)$ så vi kör dit först

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\big(x^4\big) \iff e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

och vi ser att $e^x - 1 \to 0$ ungefär som $x \to 0$. Detta innebär att när vi utvecklar $\cos t$ med $t = e^x - 1 \approx x$ så behöver vi gå till $\mathcal{O}\big(t^4\big)$

Exempel 2.a

Börjar alltid inifrån! Skulle till $\mathcal{O}\big(x^4\big)$ så vi kör dit först

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\big(x^4\big) \iff e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

och vi ser att $e^x - 1 \to 0$ ungefär som $x \to 0$. Detta innebär att när vi utvecklar $\cos t$ med $t = e^x - 1 \approx x$ så behöver vi gå till $\mathcal{O}\big(t^4\big)$, d v s

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}\big(t^4\big)\,.$$

Exempel 2.a

Börjar alltid inifrån! Skulle till $\mathcal{O}\big(x^4\big)$ så vi kör dit först

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\big(x^4\big) \iff e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

och vi ser att $e^x - 1 \to 0$ ungefär som $x \to 0$. Detta innebär att när vi utvecklar $\cos t$ med $t = e^x - 1 \approx x$ så behöver vi gå till $\mathcal{O}\big(t^4\big)$, d v s

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}\big(t^4\big)\,.$$

Men då den lägsta t-potensen är 2 behöver vi inte gå längre än

Exempel 2.a

Börjar alltid inifrån! Skulle till $\mathcal{O}\big(x^4\big)$ så vi kör dit först

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\big(x^4\big) \iff e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

och vi ser att $e^x - 1 \to 0$ ungefär som $x \to 0$. Detta innebär att när vi utvecklar $\cos t$ med $t = e^x - 1 \approx x$ så behöver vi gå till $\mathcal{O}\big(t^4\big)$, d v s

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}\big(t^4\big)\,.$$

Men då den lägsta t-potensen är 2 behöver vi inte gå längre än

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\,.$$

Exempel 2.a

Exempel 2.a

Vi får

Exempel 2.a

Vi får

$$\cos\left(e^x - 1\right) = \cos\underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\right)}_{\text{tänk } = t} =$$

Exempel 2.a

Vi får

$$\begin{aligned}\cos\left(e^x - 1\right) &= \cos \underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)}_{\text{tänk } = t} = \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)^2 + \mathcal{O}(x^4)\end{aligned}$$

Exempel 2.a

Vi får

$$\cos\left(e^x - 1\right) = \cos\underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\right)}_{\text{tänk } = t} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\right)^2 + \mathcal{O}\big(x^4\big) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{x^2}{2} + \right.$$

Exempel 2.a

Vi får

$$\cos\left(e^x - 1\right) = \cos\underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\right)}_{\text{tänk } = t} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\right)^2 + \mathcal{O}\big(x^4\big) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{x^2}{2} + \text{grad 4 och högre}\right)$$

Vi får

$$\cos\left(e^x - 1\right) = \cos\underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\right)}_{\text{tänk } = t} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\right)^2 + \mathcal{O}\big(x^4\big) \; =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2{\cdot}x{\cdot}\frac{x^2}{2} + \text{grad 4 och högre}\right) +$$

$$+\mathcal{O}\underbrace{\left(\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\right)^4\right)}_{\approx x^4} =$$

Exempel 2.a

Vi får

$$\begin{aligned}
\cos\left(e^x - 1\right) &= \cos\underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\right)}_{\text{tänk } = t} = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\right)^2 + \mathcal{O}\big(x^4\big) = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2{\cdot}x{\cdot}\frac{x^2}{2} + \text{grad 4 och högre}\right) + \\
&\qquad + \mathcal{O}\underbrace{\left(\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\big(x^3\big)\right)^4\right)}_{\approx x^4} = \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)
\end{aligned}$$

Exempel 2.b

Exempel 2.b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(e^{x}-1\right)-1+\dfrac{x^{2}}{2}}{x^{3}} = ?$$

Exempel 2.b

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = ?$$

Med hjälp av föregående utveckling fås

Exempel 2.b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = ?$$

Med hjälp av föregående utveckling fås

$$\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \frac{x^2}{2} =$$

Exempel 2.b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = ?$$

Med hjälp av föregående utveckling fås

$$\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) - 1 + \frac{x^2}{2}$$

Exempel 2.b

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = ?$$

Med hjälp av föregående utveckling fås

$$\begin{aligned}\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) - 1 + \frac{x^2}{2} = \\ = -\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)\end{aligned}$$

Exempel 2.b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = ?$$

Med hjälp av föregående utveckling fås

$$\begin{gathered}\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) - 1 + \frac{x^2}{2} = \\ = -\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) \qquad \text{så att}\end{gathered}$$

Exempel 2.b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = ?$$

Med hjälp av föregående utveckling fås

$$\begin{gathered}\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) - 1 + \frac{x^2}{2} = \\ = -\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) \qquad \text{så att}\end{gathered}$$

$$\frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} =$$

Exempel 2.b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = ?$$

Med hjälp av föregående utveckling fås

$$\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) - 1 + \frac{x^2}{2} =$$
$$= -\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) \qquad \text{så att}$$

$$\frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{-\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3}$$

Exempel 2.b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = ?$$

Med hjälp av föregående utveckling fås

$$\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) - 1 + \frac{x^2}{2} =$$
$$= -\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) \qquad \text{så att}$$

$$\frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{-\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)$$

Exempel 2.b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = ?$$

Med hjälp av föregående utveckling fås

$$\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) - 1 + \frac{x^2}{2} =$$
$$= -\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) \qquad \text{så att}$$

$$\frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{-\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x) \to -\frac{1}{2}$$

Exempel 2.b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = ?$$

Med hjälp av föregående utveckling fås

$$\begin{aligned}\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \frac{x^2}{2} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) - 1 + \frac{x^2}{2} = \\ &= -\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) \qquad \text{så att}\end{aligned}$$

$$\frac{\cos\left(e^x - 1\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{-\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x) \to -\frac{1}{2}$$

då $x \to 0$.

Exempel 2.c

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos\left(e^x - 1\right)$ lokalt extremvärde i origo?

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos\left(e^x - 1\right)$ lokalt extremvärde i origo?
Då
$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos(e^x - 1)$ lokalt extremvärde i origo?
Då
$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$
så följer att $f'(0) = 0$

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos\left(e^x - 1\right)$ lokalt extremvärde i origo?
Då

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

så följer att $f'(0) = 0$ så $x = 0$ skulle kunna vara lokalt extremvärde.

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos(e^x - 1)$ lokalt extremvärde i origo?
Då

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

så följer att $f'(0) = 0$ så $x = 0$ skulle kunna vara lokalt extremvärde. Vidare

$$\cos(e^x - 1) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) =$$

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos(e^x - 1)$ lokalt extremvärde i origo?
Då

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

så följer att $f'(0) = 0$ så $x = 0$ skulle kunna vara lokalt extremvärde. Vidare

$$\cos(e^x - 1) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\big(x^3\big) =$$

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos(e^x - 1)$ lokalt extremvärde i origo?
Då

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

så följer att $f'(0) = 0$ så $x = 0$ skulle kunna vara lokalt extremvärde. Vidare

$$\cos(e^x - 1) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\big(x^3\big) =$$
$$= 1 + x^2\left(-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)\right)$$

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos\left(e^x - 1\right)$ lokalt extremvärde i origo?
Då

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

så följer att $f'(0) = 0$ så $x = 0$ skulle kunna vara lokalt extremvärde. Vidare

$$\cos\left(e^x - 1\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\big(x^3\big) =$$

$$= 1 + \underbrace{x^2 \left(\underbrace{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)}_{<0 \text{ om } x \text{ litet}} \right)}$$

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos(e^x - 1)$ lokalt extremvärde i origo?
Då

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

så följer att $f'(0) = 0$ så $x = 0$ skulle kunna vara lokalt extremvärde. Vidare

$$\cos(e^x - 1) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\big(x^3\big) =$$

$$= 1 + \underbrace{x^2\Bigg(\underbrace{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)}_{<0 \text{ om } x \text{ litet}}\Bigg)}_{<0 \text{ om } x \neq 0 \text{ litet}}$$

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos(e^x - 1)$ lokalt extremvärde i origo?
Då

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$

så följer att $f'(0) = 0$ så $x = 0$ skulle kunna vara lokalt extremvärde. Vidare

$$\cos(e^x - 1) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\big(x^3\big) =$$

$$= 1 + \underbrace{x^2 \left(\underbrace{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)}_{<0 \text{ om } x \text{ litet}} \right)}_{<0 \text{ om } x \neq 0 \text{ litet}} < 1$$

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos(e^x - 1)$ lokalt extremvärde i origo?
Då

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

så följer att $f'(0) = 0$ så $x = 0$ skulle kunna vara lokalt extremvärde. Vidare

$$\cos(e^x - 1) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3) =$$

$$= 1 + \underbrace{x^2 \Big(\underbrace{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)}_{<0 \text{ om } x \text{ litet}} \Big)}_{<0 \text{ om } x \neq 0 \text{ litet}} < 1$$

om $x \neq 0$ tillräckligt nära 0

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos(e^x - 1)$ lokalt extremvärde i origo?
Då
$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)$$
så följer att $f'(0) = 0$ så $x = 0$ skulle kunna vara lokalt extremvärde. Vidare

$$\cos(e^x - 1) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\big(x^3\big) =$$
$$= 1 + \underbrace{x^2\left(\underbrace{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)}_{<0 \text{ om } x \text{ litet}}\right)}_{<0 \text{ om } x \neq 0 \text{ litet}} < 1$$

om $x \neq 0$ tillräckligt nära 0, d v s vi har lokalt maxvärde 1 i $x = 0$.