

Exempel 2

Låt $f(x) = \cos(e^x - 1)$.

- Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till $f(x)$ med restterm $\mathcal{O}(x^4)$.
- Använd resultatet i (a) för att beräkna
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^x - 1) - 1 + x^2/2}{x^3}.$$
- Använd resultatet i (a) för att avgöra om $f(x)$ har ett lokalt extremvärde i $x = 0$ (och ange i så fall vilken typ).

1 / 5

Exempel 2.a

Börjar alltid inifrån! Skulle till $\mathcal{O}(x^4)$ så vi kör dit först

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) \iff e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

och vi ser att $e^x - 1 \rightarrow 0$ ungefär som $x \rightarrow 0$. Detta innebär att när vi utvecklar $\cos t$ med $t = e^x - 1 \approx x$ så behöver vi gå till $\mathcal{O}(t^4)$, dvs

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^4).$$

Men då den lägsta t -potensen är 2 behöver vi inte gå längre än

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3).$$

2 / 5

Exempel 2.a

Vi får

$$\begin{aligned} \cos(e^x - 1) &= \cos\left(\underbrace{x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)}_{\text{tänk } = t}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)^2 + \mathcal{O}(x^4) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{x^2}{2} + \text{grad 4 och högre}\right) + \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)^4}_{\approx x^4}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4) \end{aligned}$$

3 / 5

Exempel 2.b

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^x - 1) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^3} = ?$$

Med hjälp av föregående utveckling fås

$$\begin{aligned} \cos(e^x - 1) - 1 + \frac{x^2}{2} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} = \\ &= -\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad \text{så att} \end{aligned}$$

$$\frac{\cos(e^x - 1) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{-\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x) \rightarrow -\frac{1}{2}$$

då $x \rightarrow 0$.

4 / 5

Exempel 2.c

Har $f(x) = \cos(e^x - 1)$ lokalt extremvärde i origo?

Då

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

så följer att $f'(0) = 0$ så $x = 0$ skulle kunna vara lokalt extremvärde. Vidare

$$\cos(e^x - 1) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4) = 1 + x^2 \left(-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x) \right) < 1$$

om $x \neq 0$ tillräckligt nära 0, d v s vi har lokalt maxvärde 1 i $x = 0$.