Exempel 4, mera entydighet.

Exempel 4, mera entydighet.

Definiera funktionen $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$ för $x \in \mathbf{R}$.

Exempel 4, mera entydighet.

Definiera funktionen $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ för $x \in \mathbf{R}$. Denna funktion har en invers som brukar kallas $\operatorname{arsinh}(x)$ för $x \in \mathbf{R}$.

Exempel 4, mera entydighet.

Definiera funktionen $\sinh(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ för $x \in \mathbf{R}$. Denna funktion har en invers som brukar kallas $\operatorname{arsinh}(x)$ för $x \in \mathbf{R}$. Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för $\operatorname{arsinh}(x)$.

Exempel 4, mera entydighet.

Definiera funktionen $\sinh(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$ för $x \in \mathbf{R}$. Denna funktion har en invers som brukar kallas $\operatorname{arsinh}(x)$ för $x \in \mathbf{R}$. Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för $\operatorname{arsinh}(x)$.

Lösning: Om man vill kan man räkna ut inversen

Exempel 4, mera entydighet.

Definiera funktionen $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ för $x \in \mathbf{R}$. Denna funktion har en invers som brukar kallas $\operatorname{arsinh}(x)$ för $x \in \mathbf{R}$. Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för $\operatorname{arsinh}(x)$.
Lösning: Om man vill kan man räkna ut inversen (övning 2.84 i boken).

Exempel 4, mera entydighet.

Definiera funktionen $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ för $x \in \mathbf{R}$. Denna funktion har en invers som brukar kallas $\operatorname{arsinh}(x)$ för $x \in \mathbf{R}$.
Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för $\operatorname{arsinh}(x)$.
Lösning: Om man vill kan man räkna ut inversen (övning 2.84 i boken). Då fås

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Exempel 4, mera entydighet.

Definiera funktionen $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ för $x \in \mathbf{R}$. Denna funktion har en invers som brukar kallas $\operatorname{arsinh}(x)$ för $x \in \mathbf{R}$. Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för $\operatorname{arsinh}(x)$.

Lösning: Om man vill kan man räkna ut inversen (övning 2.84 i boken). Då fås

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

som brukar gå under namnet "komma-ihåg-primitiven"

Exempel 4, mera entydighet.

Definiera funktionen $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ för $x \in \mathbf{R}$. Denna funktion har en invers som brukar kallas $\operatorname{arsinh}(x)$ för $x \in \mathbf{R}$. Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för $\operatorname{arsinh}(x)$.

Lösning: Om man vill kan man räkna ut inversen (övning 2.84 i boken). Då fås

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

som brukar gå under namnet "komma-ihåg-primitiven" då dess derivata är

$$D \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Exempel 4, mera entydighet.

Definiera funktionen $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ för $x \in \mathbf{R}$. Denna funktion har en invers som brukar kallas $\operatorname{arsinh}(x)$ för $x \in \mathbf{R}$. Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för $\operatorname{arsinh}(x)$.

Lösning: Om man vill kan man räkna ut inversen (övning 2.84 i boken). Då fås

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

som brukar gå under namnet "komma-ihåg-primitiven" då dess derivata är

$$D \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \iff$$
$$\iff \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

Exempel 4, mera entydighet.

Då vi har ett konkret uttryck för den aktuella funktionen, $\operatorname{arsinh} x$ kan man förstås sätta igång och Maclaurinutveckla på vanligt sätt.

Exempel 4, mera entydighet.

Då vi har ett konkret uttryck för den aktuella funktionen, $\operatorname{arsinh} x$ kan man förstås sätta igång och Maclaurinutveckla på vanligt sätt. Vi skall istället utnyttja entydigheten hos Maclaurinutvecklingen.

Exempel 4, mera entydighet.

Då vi har ett konkret uttryck för den aktuella funktionen, $\operatorname{arsinh} x$ kan man förstås sätta igång och Maclaurinutveckla på vanligt sätt. Vi skall istället utnyttja entydigheten hos Maclaurinutvecklingen.

$$f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

Exempel 4, mera entydighet.

Då vi har ett konkret uttryck för den aktuella funktionen, $\operatorname{arsinh} x$ kan man förstås sätta igång och Maclaurinutveckla på vanligt sätt. Vi skall istället utnyttja entydigheten hos Maclaurinutvecklingen.

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) &= \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^5) - \right.
\end{aligned}
$$

Exempel 4, mera entydighet.

Då vi har ett konkret uttryck för den aktuella funktionen, $\operatorname{arsinh} x$ kan man förstås sätta igång och Maclaurinutveckla på vanligt sätt. Vi skall istället utnyttja entydigheten hos Maclaurinutvecklingen.

$$f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\Bigg(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}\big(x^5\big) -$$
$$- \Bigg(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}\big(x^5\big)\Bigg)\Bigg) =$$

Exempel 4, mera entydighet.

Då vi har ett konkret uttryck för den aktuella funktionen, $\operatorname{arsinh} x$ kan man förstås sätta igång och Maclaurinutveckla på vanligt sätt. Vi skall istället utnyttja entydigheten hos Maclaurinutvecklingen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}\big(x^5\big) - \\
&\quad - \Bigg(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}\big(x^5\big)\Bigg)\Bigg) = \\
&= x + \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}\big(x^5\big)
\end{aligned}$$

Exempel 4, mera entydighet.

Då vi har ett konkret uttryck för den aktuella funktionen, $\operatorname{arsinh} x$ kan man förstås sätta igång och Maclaurinutveckla på vanligt sätt. Vi skall istället utnyttja entydigheten hos Maclaurinutvecklingen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}\big(x^5\big) - \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}\big(x^5\big)\right)\right) = \\
&= x + \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}\big(x^5\big)
\end{aligned}$$

Notera likheterna med Maclaurinutvecklingen av $\sin x$.

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda*

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) =$$

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) =$$

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh x.$$

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh x.$$

Därmed har även inversen denna egenskap

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh x.$$

Därmed har även inversen denna egenskap vilket har som konsekvens att Maclaurinutvecklingen endast innehåller *udda* potenser.

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh x.$$

Därmed har även inversen denna egenskap vilket har som konsekvens att Maclaurinutvecklingen endast innehåller *udda* potenser. Vi kan därmed anta att Maclaurinutvecklingen av $\operatorname{arsinh} x$ är

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh x.$$

Därmed har även inversen denna egenskap vilket har som konsekvens att Maclaurinutvecklingen endast innehåller *udda* potenser. Vi kan därmed anta att Maclaurinutvecklingen av $\operatorname{arsinh} x$ är

$$\operatorname{arsinh} x = a_1 x + a_3 x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right).$$

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh x.$$

Därmed har även inversen denna egenskap vilket har som konsekvens att Maclaurinutvecklingen endast innehåller *udda* potenser. Vi kan därmed anta att Maclaurinutvecklingen av $\operatorname{arsinh} x$ är

$$\operatorname{arsinh} x = a_1 x + a_3 x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right).$$

Eftersom $\sinh x$ och $\operatorname{arsinh} x$ är varandras inverser gäller

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh x.$$

Därmed har även inversen denna egenskap vilket har som konsekvens att Maclaurinutvecklingen endast innehåller *udda* potenser. Vi kan därmed anta att Maclaurinutvecklingen av $\operatorname{arsinh} x$ är

$$\operatorname{arsinh} x = a_1 x + a_3 x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right).$$

Eftersom $\sinh x$ och $\operatorname{arsinh} x$ är varandras inverser gäller

$$\operatorname{arsinh}(\sinh x) = x,$$

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh x.$$

Därmed har även inversen denna egenskap vilket har som konsekvens att Maclaurinutvecklingen endast innehåller *udda* potenser. Vi kan därmed anta att Maclaurinutvecklingen av $\operatorname{arsinh} x$ är

$$\operatorname{arsinh} x = a_1 x + a_3 x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right).$$

Eftersom $\sinh x$ och $\operatorname{arsinh} x$ är varandras inverser gäller

$$\operatorname{arsinh}(\sinh x) = x,$$

d v s x är Maclaurinpolynomet av varje ordning större än eller lika med 1 till $\operatorname{arsinh}(\sinh x)$.

Exempel 4, mera entydighet.

Maclaurinutveckling ger

Exempel 4, mera entydighet.

Maclaurinutveckling ger

$$\operatorname{arsinh}(\sinh x) =$$

Exempel 4, mera entydighet.

Maclaurinutveckling ger

$$\operatorname{arsinh}(\sinh x) = \operatorname{arsinh}\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}(x^7)\right)$$

Exempel 4, mera entydighet.

Maclaurinutveckling ger

$$\operatorname{arsinh}(\sinh x) = \operatorname{arsinh}\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}(x^7)\right) =$$

$$= a_1\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right) +$$

Exempel 4, mera entydighet.

Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(\sinh x) &= \operatorname{arsinh}\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\mathcal{O}(x^7)\right) = \\ &= a_1\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)+a_3\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^3+\end{aligned}$$

Exempel 4, mera entydighet.

Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(\sinh x) &= \operatorname{arsinh}\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\mathcal{O}(x^7)\right) = \\ &= a_1\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)+a_3\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^3+ \\ &\qquad +\mathcal{O}\left(\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^5\right)\end{aligned}$$

Exemple 4, mera entydighet.

Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(\sinh x) &= \operatorname{arsinh}\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\mathcal{O}(x^7)\right) = \\ &= a_1\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)+a_3\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^3+ \\ &\qquad +\mathcal{O}\left(\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^5\right) = \\ &= a_1x+x^3\left(a_1\frac{1}{6}+a_3\right)+\mathcal{O}(x^5)\end{aligned}$$

Exempel 4, mera entydighet.

Maclaurinutveckling ger

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}(\sinh x) &= \operatorname{arsinh}\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\mathcal{O}(x^7)\right) = \\
&= a_1\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)+a_3\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^3+ \\
&\qquad +\mathcal{O}\left(\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^5\right) = \\
&= a_1x+x^3\left(a_1\frac{1}{6}+a_3\right)+\mathcal{O}(x^5) = x.
\end{aligned}
$$

Exempel 4, mera entydighet.

Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}(\sinh x) &= \operatorname{arsinh}\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\mathcal{O}(x^7)\right) = \\
&= a_1\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)+a_3\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^3+ \\
&\qquad +\mathcal{O}\left(\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^5\right) = \\
&= a_1x+x^3\left(a_1\frac{1}{6}+a_3\right)+\mathcal{O}(x^5) = x.
\end{aligned}$$

Ur entydighetssatsen följer då att

Exempel 4, mera entydighet.

Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(\sinh x) &= \operatorname{arsinh}\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\mathcal{O}(x^7)\right) = \\ &= a_1\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)+a_3\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^3 + \\ &\qquad +\mathcal{O}\left(\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^5\right) = \\ &= a_1x + x^3\left(a_1\frac{1}{6}+a_3\right)+\mathcal{O}(x^5) = x.\end{aligned}$$

Ur entydighetssatsen följer då att

$$a_1x+\left(a_1\frac{1}{6}+a_3\right)x^3$$

också är maclaurinpolynom av ordning 4 till $\operatorname{arsinh}(\sinh x)$.

Exempel 4, mera entydighet.

Följaktligen måste

$$a_1 x + \left(a_1 \frac{1}{6} + a_3\right) x^3 \quad \text{och} \quad x \quad \text{vara samma polynom} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1, \\ \end{array} \right.$$

Exempel 4, mera entydighet.

Följaktligen måste

$$a_1 x + \left(a_1 \frac{1}{6} + a_3\right) x^3 \quad \text{och} \quad x \quad \text{vara samma polynom} \iff$$

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ \dfrac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \iff$$

Exempel 4, mera entydighet.

Följaktligen måste

$$a_1 x + \left(a_1 \frac{1}{6} + a_3\right) x^3 \quad \text{och} \quad x \quad \text{vara samma polynom} \iff$$

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ \dfrac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1, \\ \end{cases}$$

Exempel 4, mera entydighet.

Följaktligen måste

$$a_1 x + \left(a_1 \frac{1}{6} + a_3\right) x^3 \quad \text{och} \quad x \quad \text{vara samma polynom} \iff$$

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ \dfrac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_3 = -\dfrac{a_1}{6} \end{cases}$$

Exempel 4, mera entydighet.

Följaktligen måste

$$a_1 x + \left(a_1 \frac{1}{6} + a_3\right) x^3 \quad \text{och} \quad x \quad \text{vara samma polynom} \iff$$
$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ \dfrac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_3 = -\dfrac{a_1}{6} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}.$$

Vi får

Exempel 4, mera entydighet.

Följaktligen måste

$$a_1 x + \left(a_1 \frac{1}{6} + a_3\right) x^3 \quad \text{och} \quad x \quad \text{vara samma polynom} \iff$$
$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ \dfrac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_3 = -\dfrac{a_1}{6} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}.$$

Vi får

$$\operatorname{arsinh} x = x - \frac{1}{6} x^3 + \mathcal{O}\big(x^5\big)\,.$$

Exempel 4, mera entydighet.

Följaktligen måste

$$a_1 x + \left(a_1 \frac{1}{6} + a_3\right) x^3 \quad \text{och} \quad x \quad \text{vara samma polynom} \iff$$
$$\begin{cases} \quad\quad a_1 = 1, \\ \frac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_3 = -\frac{a_1}{6} = -\frac{1}{6} \end{cases}.$$

Vi får

$$\operatorname{arsinh} x = x - \frac{1}{6} x^3 + \mathcal{O}(x^5)\,.$$

Notera att detta är samma utveckling som för $\sin x$ upp till ordning 4

Exempel 4, mera entydighet.

Följaktligen måste

$$a_1 x + \left(a_1 \frac{1}{6} + a_3 \right) x^3 \quad \text{och} \quad x \quad \text{vara samma polynom} \iff$$
$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ \dfrac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_3 = -\dfrac{a_1}{6} = -\dfrac{1}{6} \end{cases} .$$

Vi får

$$\operatorname{arsinh} x = x - \frac{1}{6} x^3 + \mathcal{O}\big(x^5\big) .$$

Notera att detta är samma utveckling som för $\sin x$ upp till ordning 4 (sen skiljer de sig åt).