Exempel 4, mera entydighet.

Definiera funktionen $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ för $x \in \mathbf{R}$. Denna funktion har en invers som brukar kallas $\operatorname{arsinh}(x)$ för $x \in \mathbf{R}$. Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för $\operatorname{arsinh}(x)$.
Lösning: Om man vill kan man räkna ut inversen (övning 2.84 i boken). Då fås

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

som brukar gå under namnet "komma-ihåg-primitiven" då dess derivata är

$$D\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \iff$$
$$\iff \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

Exempel 4, mera entydighet.

Då vi har ett konkret uttryck för den aktuella funktionen kan man förstås sätta igång och Maclaurinutveckla på vanligt sätt. Vi skall istället utnyttja entydigheten hos Maclaurinutvecklingen.

$$\begin{aligned}
f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) &= \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^5) - \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^5)\right)\right) = \\
&= x + \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5)
\end{aligned}$$

Notera likheterna med Maclaurinutvecklingen av $\sin x$.

Exempel 4, mera entydighet.

Observera att $\sinh x$ är *udda* (precis som $\sin x$), d v s

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh x.$$

Därmed har även inversen denna egenskap vilket har som konsekvens att Maclaurinutvecklingen endast innehåller *udda* potenser. Vi kan därmed anta att Maclaurinutvecklingen av $\operatorname{arsinh} x$ är

$$\operatorname{arsinh} x = a_1 x + a_3 x^3 + \mathcal{O}(x^5).$$

Eftersom $\sinh x$ och $\operatorname{arsinh} x$ är varandras inverser gäller

$$\operatorname{arsinh}(\sinh x) = x,$$

d v s x är Maclaurinpolynomet av varje ordning större än eller lika med 1 till $\operatorname{arsinh}(\sinh x)$.

Exempel 4, mera entydighet.

Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}(\sinh x) &= \operatorname{arsinh}\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}(x^7)\right) = \\
&= a_1\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right) + a_3\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right)^3 + \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right)^5\right) = \\
&= a_1 x + x^3\left(a_1\frac{1}{6} + a_3\right) + \mathcal{O}(x^5) = x.
\end{aligned}$$

Ur entydighetssatsen följer då att

$$a_1 x + \left(a_1\frac{1}{6} + a_3\right)x^3$$

också är maclaurinpolynom av ordning 4 till $\operatorname{arsinh}(\sinh x)$.

Exempel 4, mera entydighet.

Följaktligen måste

$$a_1 x + \left(a_1 \frac{1}{6} + a_3\right) x^3 \quad \text{och} \quad x \quad \text{vara samma polynom} \iff$$

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ \dfrac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_3 = -\dfrac{a_1}{6} = -\dfrac{1}{6} \end{cases} .$$

Vi får

$$\operatorname{arsinh} x = x - \frac{1}{6} x^3 + \mathcal{O}(x^5) .$$

Notera att detta är samma utveckling som för $\sin x$ upp till ordning 4 (sen skiljer de sig åt).