TATA42 Envariabelanalys, del2

- Föreläsare och examinator: Ulf Janfalk
- Kurshemsida:

  http://courses.mai.liu.se/GU/TATA42/

  Där finns det mesta om kursen. Allt extra som visas under föreläsningarna kommer att läggas upp under fliken "Extramaterial".

Dagens ämnen

- Maclaurins formel.
- Taylors formel.
- Restterm i ordo-form.
- Elementära Maclaurinutvecklingar.
- Några enkla tillämpningar.

Approximation

- Vill approximera "krånglig" funktion med enklare, t ex polynom.
- Två varianter:
  - Global approximation: skall funka på "långt" intervall.
  - Lokal approximation: skall funka "nära" viss punkt.
- Vad som är "bästa" approximationen beror på hur vi bestämt oss för att mäta felet.

Taylors och Maclaurins formel

- Taylor och Maclaurin: Lokal approximation.
- Maclaurins formel: approximation med polynom "nära" $x = 0$.
- Taylors formel: samma som Maclaurin men för godtyckligt x, $x = a$.
- Taylors formel kom först (1715) och Maclaurins senare (1742).

Maclaurins formel

- Antag att f har kontinuerliga derivator åtminstone upp till ordning $n+1$.
- Vill approximera f med termer av typ x^n, d v s

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + r_{n+1}(x)$$

  och där felet $r_{n+1}(x)$ är litet jämfört med sista termen $a_n x^n$.
- Hur skall vi välja koefficienterna?.

Maclaurins formel

Sats 8.1 (Maclaurins formel, sid 352)

Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av 0 så har f Maclaurinutvecklingen

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_{n+1}(x)$$

där resttermen $r_{n+1}(x)$ kan skrivas på formen

$$r_{n+1}(x) = \mathcal{O}\left(x^{n+1}\right)$$

för x nära 0.

Återkommer senare till vad $\mathcal{O}\left(x^{n+1}\right)$ betyder.

Observera att då "x nära 0" så är efterföljande term i utvecklingen mycket mindre än föregångaren.

Maclaurinpolynomet

Definition 8.1 (Maclaurinpolynomet, sid 351)

Polynomet

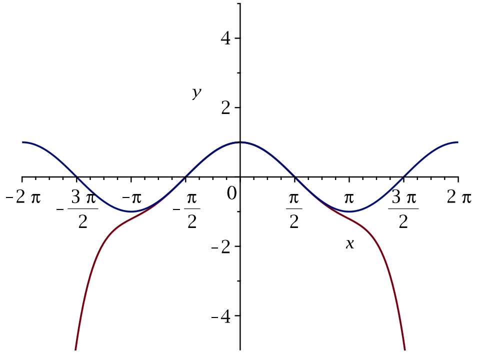
$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

kallas Maclaurinpolynomet av ordning n till f.

OBS!! Vi säger *ordning* inte *grad* eftersom p_n har grad $< n$ om $f^{(n)}(0) = 0$.

Maclaurinutveckling av $\cos x$, x "nära" 0

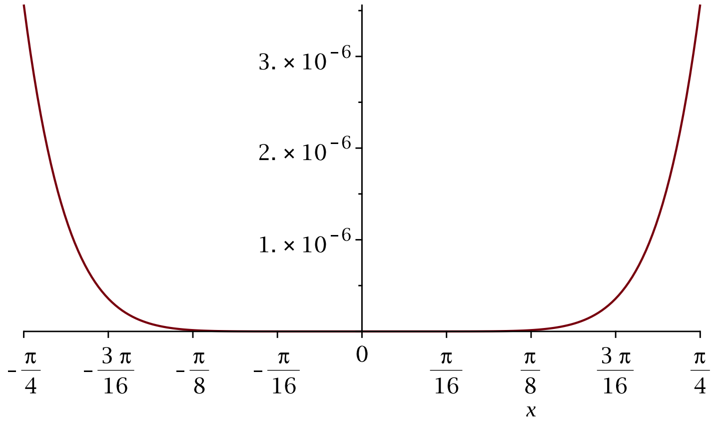
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}\left(x^8\right)$$



Plot av $\cos x$ tillsammans med sitt Maclaurinpolynom av ordning 7 (och grad 6).

Maclaurinutveckling av $\cos x$, x “nära” 0

Plot av $\cos x-$ Maclaurinpolynomet av ordning 7 (och grad 6).



Ordoaritmetik, $|x| < 1$

1. $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant. Samma storleksordning som en konstant.
2. $\mathcal{O}(x^n) = x^n\mathcal{O}(1) = x^k\mathcal{O}\left(x^{n-k}\right)$
3. $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.
4. $\mathcal{O}(x^n) \cdot \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}\left(x^{n+m}\right)$
5. $\mathcal{O}(x^n) - \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
6. $-\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
7. $\mathcal{O}(x^n\mathcal{O}(x^m)) = \mathcal{O}\left(x^{n+m}\right)$

Taylors formel

- Hur får vi till motsvarande formel nära en godtycklig punkt?
- Byt variabel så att $x = a$ svarar mot nya variabeln $t = 0$.
- Sätt $x = a + t$.
- Då är $g(t) = f(a + t)$ och $g(t)$ är lika deriverbar som $f(x)$.
- Följaktligen kan vi använda Maclaurins formel på $g(t)$.

Taylors formel

Sats 8.2 (Taylors formel, sid 354)

Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av $x=a$ så har f Taylorutvecklingen

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_{n+1}(x)$$

där resttermen $r_{n+1}(x)$ kan skrivas på formen

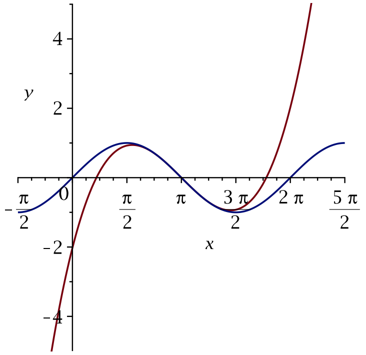
$$r_{n+1}(x) = \mathcal{O}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

för x nära a.

Observera att då x är “nära a” så är efterföljande term i utvecklingen mycket mindre än föregångaren.

Taylorutveckling av $\sin x$ kring $x = \pi$

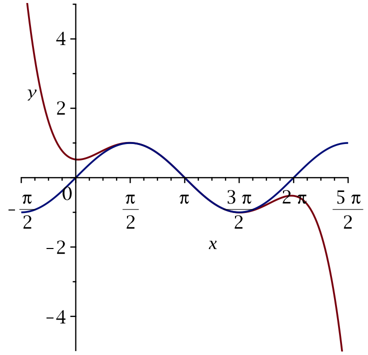
$$\sin x = -(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 + \mathcal{O}\left((x-\pi)^5\right)$$



$\sin x$ plottad med sitt taylorpolynom av ordning 4 (grad 3) kring $x = \pi$.

Taylorutveckling av $\sin x$ kring $x = \pi$

$$\sin x = -(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(x-\pi)^5 + \mathcal{O}\left((x-\pi)^7\right)$$



$\sin x$ plottad med sitt taylorpolynom av ordning 6 (grad 5) kring $x = \pi$.

Standardutvecklingar

Sats 8.3 (sid 360)

(a) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}\left(x^{n+1}\right)$$

(b) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}\left(x^{2n+1}\right)$$

(c) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}\left(x^{2n+2}\right)$$

Standardutvecklingar

Sats 8.3 (sid 360)

(d) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}\left(x^{n+1}\right)$$

(e) $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \mathcal{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \binom{\alpha}{2}\frac{\alpha-2}{3}, \text{ etc}$$

(f) $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}\left(x^{2n+1}\right)$$