

Dagens ämnen

Dagens ämnen

- Entydighet hos Taylor- och Maclaurinpolynom

Dagens ämnen

- Entydighet hos Taylor- och Maclaurinpolynom
- Konsekvenser av entydigheten

Dagens ämnen

- Entydighet hos Taylor- och Maclaurinpolynom
- Konsekvenser av entydigheten
 - Användning av standardutvecklingarna

Dagens ämnen

- Entydighet hos Taylor- och Maclaurinpolynom
- Konsekvenser av entydigheten
 - Användning av standardutvecklingarna
 - Några räkneexempel

Entydighet hos Maclaurinpolynomet

Entydighet hos Maclaurinpolynomet

Sats 8.4 (sid 368)

$$f \in C^{m+1},$$

Entydighet hos Maclaurinpolynomet

Sats 8.4 (sid 368)

$f \in C^{n+1}$, $p = \text{polynom}$ och

$$f(x) = p(x) + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

för alla x i någon omgivning av origo.

Entydighet hos Maclaurinpolynomet

Sats 8.4 (sid 368)

$f \in C^{n+1}$, $p = \text{polynom}$ och

$$f(x) = p(x) + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

för alla x i någon omgivning av origo.

Då är detta Maclaurinutvecklingen av ordning n till f .

Entydighet hos Maclaurinpolynomet

Sats 8.4 (sid 368)

$f \in C^{n+1}$, $p = \text{polynom}$ och

$$f(x) = p(x) + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

för alla x i någon omgivning av origo.

Då är detta Maclaurinutvecklingen av ordning n till f .

Följaktligen är

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Entydighet hos Maclaurinpolynomet

- Följaktligen, har man hittat ett polynom som approximerar lika bra som Maclaurinpolynomet så är det Maclaurinpolynomet man hittat.

Entydighet hos Maclaurinpolynomet

- Följaktligen, har man hittat ett polynom som approximerar lika bra som Maclaurinpolynomet så är det Maclaurinpolynomet man hittat.
- Satsen gäller förstås för Taylorpolynomet också.

Maclaurins och Taylors formel

Maclaurins formel

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Maclaurins och Taylors formel

Maclaurins formel

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Taylors formel

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \\ + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \mathcal{O}((x - a)^{n+1})$$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant.
Samma storleksordning som en konstant.

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant.
Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1)$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant.
Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant.
Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$
- 3 $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant.
Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$
- 3 $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.
- 4 $\mathcal{O}(x^n) \cdot \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant.
Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$
- 3 $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.
- 4 $\mathcal{O}(x^n) \cdot \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$
- 5 $\mathcal{O}(x^n) - \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant.
Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$
- 3 $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.
- 4 $\mathcal{O}(x^n) \cdot \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$
- 5 $\mathcal{O}(x^n) - \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
- 6 $-\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant.
Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$
- 3 $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.
- 4 $\mathcal{O}(x^n) \cdot \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$
- 5 $\mathcal{O}(x^n) - \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
- 6 $-\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
- 7 $\mathcal{O}(x^n \mathcal{O}(x^m)) = \mathcal{O}(x^{n+m})$

Standardutvecklingar

Standardutvecklingar

Sats 8.3 (sid 360)

$$(a) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Standardutvecklingar

Sats 8.3 (sid 360)

$$(a) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(b) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

Standardutvecklingar

Sats 8.3 (sid 360)

$$(a) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(b) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

$$(c) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \binom{\alpha}{2} \frac{\alpha-2}{3}$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \binom{\alpha}{2} \frac{\alpha-2}{3}, \text{ etc}$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \binom{\alpha}{2} \frac{\alpha-2}{3}, \text{ etc}$$

$$(f) \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

2:a derivatatestet

Sats

Om $f \in C^3$ och $f'(a) = 0$

2:a derivatatestet

Sats

Om $f \in C^3$ och $f'(a) = 0$ så gäller

- $f''(a) > 0 \implies f$ har lokalt minimum i $x = a$,*

2:a derivatatestet

Sats

Om $f \in C^3$ och $f'(a) = 0$ så gäller

- $f''(a) > 0 \implies f$ har lokalt minimum i $x = a$,
- $f''(a) < 0 \implies f$ har lokalt maximum i $x = a$,

2:a derivatatestet

Sats

Om $f \in C^3$ och $f'(a) = 0$ så gäller

- $f''(a) > 0 \implies f$ har lokalt minimum i $x = a$,
- $f''(a) < 0 \implies f$ har lokalt maximum i $x = a$,

Bevisas snyggt med Taylorutveckling!

Sammanfattning

- Lär dig standardutvecklingarna!!

Sammanfattning

- Lär dig standardutvecklingarna!!
- Taylor/Maclaurinpolynom är entydiga, d v s har du hittat ett polynom som approximerar lika bra så har du hittat Taylor/Maclaurinpolynomet.

Sammanfattning

- Lär dig standardutvecklingarna!!
- Taylor/Maclaurinpolynom är entydiga, d v s har du hittat ett polynom som approximerar lika bra så har du hittat Taylor/Maclaurinpolynomet.
- Derivera (nästan) aldrig fram en Taylorutveckling.

Sammanfattning

- Lär dig standardutvecklingarna!!
- Taylor/Maclaurinpolynom är entydiga, d v s har du hittat ett polynom som approximerar lika bra så har du hittat Taylor/Maclaurinpolynomet.
- Derivera (nästan) aldrig fram en Taylorutveckling.
Substituera så att du kan använda standardutvecklingarna.

Sammanfattning

- Vid utveckling av sammansatta funktioner, börja **INIFRÅN!!!**

Sammanfattning

- Vid utveckling av sammansatta funktioner, börja **INIFRÅN!!!**
- Slarva inte med ordo-termen. Ordoslarv ger 0p på tentan!

Sammanfattning

- Vid utveckling av sammansatta funktioner, börja **INIFRÅN!!!**
- Slarva inte med ordo-termen. Ordoslarv ger 0p på tentan!
- Är du osäker på hur långt du skall utveckla, ta med lite fler termer i början och när du ser vilka som är överflödiga; baka in dem i ordo-termen.