Dagens ämnen

- Entydighet hos Taylor- och Maclaurinpolynom
- Konsekvenser av entydigheten
  - Användning av standardutvecklingarna
  - Några räkneexempel

Entydighet hos Maclaurinpolynomet

Sats 8.4 (sid 368)

$f \in C^{n+1}$, $p =$polynom och

$$f(x) = p(x) + \mathcal{O}\left(x^{n+1}\right)$$

för alla x i någon omgivning av origo.
Då är detta Maclaurinutvecklingen av ordning n till f.

Följaktligen är

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Entydighet hos Maclaurinpolynomet

- Följaktligen, har man hittat ett polynom som approximerar lika bra som Maclaurinpolynomet så är det Maclaurinpolynomet man hittat.
- Satsen gäller förstås för Taylorpolynomet också.

Maclaurins och Taylors formel

Maclaurins formel

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\mathcal{O}\left(x^{n+1}\right)$$

Taylors formel

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathcal{O}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

1. $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant. Samma storleksordning som en konstant.
2. $\mathcal{O}(x^n) = x^n\mathcal{O}(1) = x^k\mathcal{O}\left(x^{n-k}\right)$
3. $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.
4. $\mathcal{O}(x^n) \cdot \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}\left(x^{n+m}\right)$
5. $\mathcal{O}(x^n) - \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
6. $-\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
7. $\mathcal{O}(x^n\mathcal{O}(x^m)) = \mathcal{O}\left(x^{n+m}\right)$

Standardutvecklingar

Sats 8.3 (sid 360)

(a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}\left(x^{n+1}\right)$

(b) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}\left(x^{2n+1}\right)$

(c) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}\left(x^{2n+2}\right)$

Standardutvecklingar

Sats 8.3 (sid 360)

(d) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}\left(x^{n+1}\right)$

(e) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \mathcal{O}\left(x^{n+1}\right)$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \binom{\alpha}{2}\frac{\alpha-2}{3}, \ etc$$

(f) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}\left(x^{2n+1}\right)$

2:a derivatatestet

Sats

Om $f \in C^3$ och $f'(a) = 0$ så gäller

- *$f''(a) > 0 \Longrightarrow f$ har lokalt minimum i $x = a$,*
- *$f''(a) < 0 \Longrightarrow f$ har lokalt maximum i $x = a$,*

Bevisas snyggt med Taylorutveckling!

Sammanfattning

- Lär dig standardutvecklingarna!!
- Taylor/Maclaurinpolynom är entydiga, d v s har du hittat ett polynom som approximerar lika bra så har du hittat Taylor/Maclaurinpolynomet.
- Derivera (nästan) aldrig fram en Taylorutveckling.
  Substituera så att du kan använda standardutvecklingarna.

Sammanfattning

- Vid utveckling av sammansatta funktioner, börja **INIFRÅN!!!**
- Slarva inte med ordo-termen. Ordoslarv ger 0p på tentan!
- Är du osäker på hur långt du skall utveckla, ta med lite fler termer i början och när du ser vilka som är överflödiga; baka in dem i ordo-termen.