Dagens ämnen

- Numeriska beräkningar med Taylors och Maclaurins formel.
- Användning av Lagranges restterm.

Lagranges restterm

Taylors formel

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +$$
$$+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_{n+1}(x)$$

Tidigare visat att

$$r_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \quad \text{(Integralform)}$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{(Lagranges form)}$$

för något tal ξ mellan a och x.
Enkelt att derivera fram restterm på Lagranges form för alla standardutvecklingar *utom* för $\arctan x$.

Standardutvecklingar

$$\text{(a)} \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_{n+1}(x)$$

$$r_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\text{(b)} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n+1}(x)$$

$$r_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n \cos \xi}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\text{(c)} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+2}(x)$$

$$r_{2n+2}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

Standardutvecklingar

(d) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_{n+1}(x)$

$$r_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

(e) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + r_{n+1}(x)$

$$r_{n+1}(x) = \binom{\alpha}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1-\alpha}}$$

(f) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + r_{2n+1}(x)$

$$r_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$