Dagens ämnen

- Numeriska beräkningar med Taylors och Maclaurins formel.
- Användning av Lagranges restterm.

Lagranges restterm

Taylors formel

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_{n+1}(x)$$

Tidigare visat att

$$r_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \quad \text{(Integralform)}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{(Lagranges form)}$$

för något tal ξ mellan a och x.
Enkelt att derivera fram restterm på Lagranges form för alla standardutvecklingar *utom* för $\arctan x$.

Standardutvecklingar

(a) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_{n+1}(x)$$

$$r_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(b) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n+1}(x)$$

$$r_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n \cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

(c) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+2}(x)$$

$$r_{2n+2}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cos\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

Standardutvecklingar

(d) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_{n+1}(x)$$

$$r_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

(e) $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + r_{n+1}(x)$$

$$r_{n+1}(x) = \binom{\alpha}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1-\alpha}}$$

(f) $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + r_{2n+1}(x)$$

$$r_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$