Bestäm α så att $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2} \approx \sqrt{n^2} = n, \qquad \sqrt[3]{n^3+3n} \approx \sqrt[3]{n^3} = n$

Bestäm α så att $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2} \approx \sqrt{n^2} = n$, $\sqrt[3]{n^3+3n} \approx \sqrt[3]{n^3} = n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha > 0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha < 0$.

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^\alpha \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2} \approx \sqrt{n^2} = n$, $\sqrt[3]{n^3+3n} \approx \sqrt[3]{n^3} = n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty - \infty)$ om $\alpha > 0$ och $\dfrac{\infty - \infty}{\infty}$ om $\alpha < 0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n \to \infty$, inte 0.

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2} \approx \sqrt{n^2} = n$, $\sqrt[3]{n^3+3n} \approx \sqrt[3]{n^3} = n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha > 0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha < 0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n \to \infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bestäm α så att $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2} \approx \sqrt{n^2} = n$, $\sqrt[3]{n^3+3n} \approx \sqrt[3]{n^3} = n$ så gränsvärdet är av typen $\infty \cdot (\infty - \infty)$ om $\alpha > 0$ och $\dfrac{\infty - \infty}{\infty}$ om $\alpha < 0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n \to \infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t = \dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla.

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^\alpha \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2} \approx \sqrt{n^2} = n$, $\sqrt[3]{n^3+3n} \approx \sqrt[3]{n^3} = n$ så gränsvärdet är av typen $\infty \cdot (\infty - \infty)$ om $\alpha > 0$ och $\dfrac{\infty - \infty}{\infty}$ om $\alpha < 0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n \to \infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t = \dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla. Vi får

$$\sqrt{n^2+2} = n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\begin{array}{c}\text{utveckla } (1+t)^\alpha \\ \alpha = 1/2, t = 2/n^2\end{array}\right] =$$

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2} \approx \sqrt{n^2} = n,$ $\sqrt[3]{n^3+3n} \approx \sqrt[3]{n^3} = n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha > 0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha < 0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n \to \infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t = \dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla. Vi får

$$\sqrt{n^2+2}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\begin{array}{c}\text{utveckla } (1+t)^{\alpha} \\ \alpha = 1/2, t = 2/n^2\end{array}\right]=n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{2}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^3\right)\right)$$

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2} \approx \sqrt{n^2} = n$, $\sqrt[3]{n^3+3n} \approx \sqrt[3]{n^3} = n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha > 0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha < 0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n \to \infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t = \dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla. Vi får

$$\sqrt{n^2+2}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\begin{array}{c}\text{utveckla } (1+t)^{\alpha}\\ \alpha=1/2, t=2/n^2\end{array}\right]=n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{2}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^3\right)\right)=$$

$$=\left[\binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}=-\frac{1}{8}\right]$$

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2} \approx \sqrt{n^2} = n,\quad \sqrt[3]{n^3+3n} \approx \sqrt[3]{n^3} = n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha > 0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha < 0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n \to \infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t = \dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla. Vi får

$$\sqrt{n^2+2}{=}n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\text{utveckla } (1+t)^{\alpha}\\ \alpha=1/2, t=2/n^2\end{bmatrix}{=}n\left(1{+}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}{+}\binom{1/2}{2}\left(\frac{2}{n^2}\right)^2{+}\mathcal{O}\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^3\right)\right)=$$

$$=\left[\binom{1/2}{2}{=}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}{=}-\frac{1}{8}\right]{=}n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)=$$

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2}\approx\sqrt{n^2}=n$, $\sqrt[3]{n^3+3n}\approx\sqrt[3]{n^3}=n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha>0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha<0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n\to\infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2}=\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t=\dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla. Vi får

$$\sqrt{n^2+2}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\text{utveckla } (1+t)^{\alpha}\\ \alpha=1/2, t=2/n^2\end{bmatrix}=n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{2}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^3\right)\right)=$$

$$=\left[\binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}=-\frac{1}{8}\right]=n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)=\underline{\underline{n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)}}.$$

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2}\approx\sqrt{n^2}=n$, $\sqrt[3]{n^3+3n}\approx\sqrt[3]{n^3}=n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha>0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha<0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n\to\infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2}=\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t=\dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla. Vi får

$$\sqrt{n^2+2}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\begin{matrix}\text{utveckla } (1+t)^{\alpha}\\ \alpha=1/2, t=2/n^2\end{matrix}\right]=n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{2}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^3\right)\right)=$$

$$=\left[\binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}=-\frac{1}{8}\right]=n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)=\underline{\underline{n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)}}.$$

På samma sätt fås

$$\sqrt[3]{n^3+3n}=\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2}\approx\sqrt{n^2}=n,\quad \sqrt[3]{n^3+3n}\approx\sqrt[3]{n^3}=n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha>0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha<0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n\to\infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2}=\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t=\dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla. Vi får

$$\sqrt{n^2+2}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\begin{matrix}\text{utveckla } (1+t)^{\alpha}\\ \alpha=1/2, t=2/n^2\end{matrix}\right]=n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{2}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^3\right)\right)=$$

$$=\left[\binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}=-\frac{1}{8}\right]=n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)=\underline{\underline{n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)}}.$$

På samma sätt fås

$$\sqrt[3]{n^3+3n}=\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[\begin{matrix}\text{utveckla } (1+t)^{\alpha}\\ \alpha=1/3, t=3/n^2\end{matrix}\right]=$$

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2} \approx \sqrt{n^2} = n$, $\sqrt[3]{n^3+3n} \approx \sqrt[3]{n^3} = n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha > 0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha < 0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n \to \infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t=\dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla. Vi får

$$\sqrt{n^2+2}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\text{utveckla } (1+t)^{\alpha}\\ \alpha=1/2, t=2/n^2\end{bmatrix}=n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{2}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^3\right)\right)=$$

$$=\left[\binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}=-\frac{1}{8}\right]=n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)=\underline{\underline{n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)}}.$$

På samma sätt fås

$$\sqrt[3]{n^3+3n}=\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\begin{bmatrix}\text{utveckla } (1+t)^{\alpha}\\ \alpha=1/3, t=3/n^2\end{bmatrix}=$$

$$=n\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{n^2}+\binom{1/3}{2}\left(\frac{3}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{3}{n^2}\right)^3\right)\right)$$

Bestäm α så att $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2}\approx\sqrt{n^2}=n,\quad \sqrt[3]{n^3+3n}\approx\sqrt[3]{n^3}=n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha>0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha<0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n\to\infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2}=\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t=\dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla. Vi får

$$\sqrt{n^2+2}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\text{utveckla }(1+t)^\alpha\\ \alpha=1/2,t=2/n^2\end{bmatrix}=n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{2}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^3\right)\right)=$$

$$=\left[\binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}=-\frac{1}{8}\right]=n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)=\underline{\underline{n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)}}.$$

På samma sätt fås

$$\sqrt[3]{n^3+3n}=\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\begin{bmatrix}\text{utveckla }(1+t)^\alpha\\ \alpha=1/3,t=3/n^2\end{bmatrix}=$$

$$=n\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{n^2}+\binom{1/3}{2}\left(\frac{3}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{3}{n^2}\right)^3\right)\right)=\left[\binom{1/3}{2}=\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{9}\right]$$

Bestäm α så att $\lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2}\approx\sqrt{n^2}=n$, $\sqrt[3]{n^3+3n}\approx\sqrt[3]{n^3}=n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha>0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha<0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n\to\infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2}=\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac12}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t=\dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla. Vi får

$$\sqrt{n^2+2}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac12}=\begin{bmatrix}\text{utveckla }(1+t)^\alpha\\ \alpha=1/2, t=2/n^2\end{bmatrix}=n\left(1+\frac12\cdot\frac{2}{n^2}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{2}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^3\right)\right)=$$

$$=\left[\binom{1/2}{2}=\frac{\frac12(\frac12-1)}{2}=-\frac18\right]=n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac18\cdot\frac{4}{n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)=\underline{\underline{n+\frac1n-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)}}.$$

På samma sätt fås

$$\sqrt[3]{n^3+3n}=\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac13}=\begin{bmatrix}\text{utveckla }(1+t)^\alpha\\ \alpha=1/3, t=3/n^2\end{bmatrix}=$$

$$=n\left(1+\frac13\cdot\frac{3}{n^2}+\binom{1/3}{2}\left(\frac{3}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{3}{n^2}\right)^3\right)\right)=\left[\binom{1/3}{2}=\frac{\frac13(\frac13-1)}{2}=-\frac13\cdot\frac23\cdot\frac12=-\frac19\right]=$$

$$=n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac19\cdot\frac{9}{n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)$$

Bestäm α så att $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)$ existerar och är $\neq 0$.

Lösning: För stora n gäller $\sqrt{n^2+2}\approx\sqrt{n^2}=n$, $\sqrt[3]{n^3+3n}\approx\sqrt[3]{n^3}=n$ så gränsvärdet är av typen $\infty\cdot(\infty-\infty)$ om $\alpha>0$ och $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ om $\alpha<0$. Kan inte Maclaurinutveckla som det står, $n\to\infty$, inte 0. Skriv om som

$$\sqrt{n^2+2}=\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eftersom n är stort blir $\dfrac{2}{n^2}$ litet, så om vi tänker $t=\dfrac{2}{n^2}$ kan vi Maclaurinutveckla. Vi får

$$\sqrt{n^2+2}=n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\text{utveckla } (1+t)^\alpha\\ \alpha=1/2, t=2/n^2\end{bmatrix}=n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{2}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^3\right)\right)=$$

$$=\left[\binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}=-\frac{1}{8}\right]=n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)=\underline{\underline{n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)}}.$$

På samma sätt fås

$$\sqrt[3]{n^3+3n}=\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}=n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\begin{bmatrix}\text{utveckla } (1+t)^\alpha\\ \alpha=1/3, t=3/n^2\end{bmatrix}=$$

$$=n\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{n^2}+\binom{1/3}{2}\left(\frac{3}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{3}{n^2}\right)^3\right)\right)=\left[\binom{1/3}{2}=\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{9}\right]=$$

$$=n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{n^4}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)=\underline{\underline{n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)}}.$$

Vi får

$$n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)=$$

Vi får

$$n^\alpha\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)=n^\alpha\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)-\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right)$$

Vi får

$$n^\alpha\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)=n^\alpha\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)-\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right)=$$
$$=n^\alpha\left(-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)$$

Vi får

$$
\begin{aligned}
n^\alpha \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+3n}\right) &= n^\alpha \left(n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right) - \left(n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right) = \\
&= n^\alpha \left(-\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = n^\alpha \left(\frac{1}{2n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Vi får

$$
\begin{aligned}
n^\alpha\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right) &= n^\alpha\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)-\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right)=\\
&= n^\alpha\left(-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)=n^\alpha\left(\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)=\\
&= n^{\alpha-3}\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Vi får

$$
\begin{aligned}
n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right) &= n^{\alpha}\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)-\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right)= \\
&= n^{\alpha}\left(-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)=n^{\alpha}\left(\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)= \\
&= n^{\alpha-3}\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\to\begin{cases}\infty & \text{om } \alpha>3 \\ & \\ & \end{cases} \quad \text{då} \quad n\to\infty.
\end{aligned}
$$

Vi får

$$\begin{aligned}
n^\alpha\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right) &= n^\alpha\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)-\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right) = \\
&= n^\alpha\left(-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = n^\alpha\left(\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = \\
&= n^{\alpha-3}\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \to \begin{cases} \infty & \text{om } \alpha > 3 \\ \dfrac{1}{2} & \text{om } \alpha = 3 \end{cases} \quad \text{då} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Vi får

$$
\begin{aligned}
n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right) &= n^{\alpha}\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)-\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right)= \\
&= n^{\alpha}\left(-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)=n^{\alpha}\left(\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)= \\
&= n^{\alpha-3}\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\to\begin{cases}\infty & \text{om } \alpha>3\\ \dfrac{1}{2} & \text{om } \alpha=3\\ 0 & \text{om } \alpha<3\end{cases}\quad \text{då}\quad n\to\infty.
\end{aligned}
$$

Vi får

$$
\begin{aligned}
n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right) &= n^{\alpha}\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)-\left(n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right)= \\
&= n^{\alpha}\left(-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)=n^{\alpha}\left(\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)= \\
&= n^{\alpha-3}\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\to\begin{cases}\infty & \text{om } \alpha>3\\ \frac{1}{2} & \text{om } \alpha=3\\ 0 & \text{om } \alpha<3\end{cases} \quad \text{då} \quad n\to\infty.
\end{aligned}
$$

Följaktligen, gränsvärdet existerar och är $\neq 0$ för $\alpha = 3$. Gränsvärdet är då $\dfrac{1}{2}$.