Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2:$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \cos\varphi,$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le r \le \cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le r \le \cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le r \le \cos\varphi, \ \ -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \cos\varphi, \ -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \cos\varphi, \ \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \cos\varphi, \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \cos\varphi, \; -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\, 0 \le r \le \cos\varphi, \;\; -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\, r = \cos\varphi, \; -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2}r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \cos\varphi, \ \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \cos\varphi, \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2}r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos^2\varphi \, d\varphi$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \cos\varphi, \ \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \cos\varphi, \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/3}$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \cos\varphi, \ \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \cos\varphi, \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/3} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le r \le \cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \cos\varphi, \ -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/3} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{-\pi/6}^{\pi/3}$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \cos\varphi, \ \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \cos\varphi, \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_{-\pi/6}^{\pi/3} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{-\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} \right.$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \cos\varphi, \ \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \cos\varphi, \ -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/3} (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{-\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq r \leq \cos\varphi, \;\; -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r = \cos\varphi, \; -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \dfrac{1}{2} r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_{-\pi/6}^{\pi/3} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{-\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi + \sqrt{3}}{8}.$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=}$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x=r(\varphi)\cos\varphi \\ y=r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \cos\varphi \\ r'(\varphi) = -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x{=}r(\varphi)\cos\varphi \\ y{=}r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} {=} \sqrt{r(\varphi)^2{+}r'(\varphi)^2}\, d\varphi{=}$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \cos\varphi \\ r'(\varphi) = -\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\cos^2\varphi{+}\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \cos\varphi \\ r'(\varphi) = -\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \stackrel{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x{=}r(\varphi)\cos\varphi \\ y{=}r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} {=} \sqrt{r(\varphi)^2{+}r'(\varphi)^2}\, d\varphi{=}$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \cos\varphi \\ r'(\varphi) = -\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\cos^2\varphi{+}\sin^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$
$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \cos\varphi \\ r'(\varphi) = -\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{-\pi/6}^{\pi/3} ds(\varphi)$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \cos\varphi \\ r'(\varphi) = -\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{-\pi/6}^{\pi/3} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{\pi/6} d\varphi$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x{=}r(\varphi)\cos\varphi \\ y{=}r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} {=} \sqrt{r(\varphi)^2{+}r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \cos\varphi \\ r'(\varphi) = -\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{-\pi/6}^{\pi/3} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{\pi/6} d\varphi = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x{=}r(\varphi)\cos\varphi \\ y{=}r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \cos\varphi \\ r'(\varphi) = -\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{-\pi/6}^{\pi/3} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{\pi/6} d\varphi = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Svar: $A = \dfrac{\pi + \sqrt{3}}{8}$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x{=}r(\varphi)\cos\varphi \\ y{=}r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \cos\varphi \\ r'(\varphi) = -\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{-\pi/6}^{\pi/3} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{\pi/6} d\varphi = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Svar: $A = \dfrac{\pi + \sqrt{3}}{8}$ respektive $L = \dfrac{\pi}{2}$.