Exempel 1

Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \le r \le \cos\varphi,\ \ -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon r = \cos\varphi,\ -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Lösning: I polära koordinater har vi areaelementet $dA = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$ vilket ger

$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/3} (1+\cos 2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{-\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi+\sqrt{3}}{8}.$$

Exempel 1

Kurvlängden får vi genom att integrera bågelementet ds

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \overset{t=\varphi}{=} \begin{bmatrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} r(\varphi) = \cos\varphi \\ r'(\varphi) = -\sin\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{-\pi/6}^{\pi/3} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{\pi/6} d\varphi = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Svar: $A = \dfrac{\pi+\sqrt{3}}{8}$ respektive $L = \dfrac{\pi}{2}$.