Exempel 2

Betrakta kurvan $y = x^2 + 4x$, $1 \le x \le 3$.

1. Teckna integralen för att beräkna längden av kurvan.
2. Teckna integralen för att beräkna arean av den yta som uppkommer då kurvan roteras ett varv kring linjen $x = -2$. Beräkna också arean.

Lösning: Då vi skall beräkna längden S och rotationsarean A av en *funktionskurva* har vi, i båda uppgifterna, bågelementet

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{1+(y')^2}dx = \Big[y' = 2x+4\Big] = \sqrt{1+(2x+4)^2}dx = \\
&= \sqrt{1+4(x+2)^2}dx, \\
S &= \int_1^3 ds = \int_1^3 \sqrt{1+4(x+2)^2}dx.
\end{aligned}$$

Exempel 2

Vid beräkning av rotationsarean är arealementet

$$dA = 2\pi l ds$$

där $l =$ avsåndet från segmentet ds till rotationsaxeln, i detta fall den lodräta linjen $x = -2$. Rita figur!!Vi får då

$$dA = 2\pi \underbrace{(x+2)}_{l} \underbrace{\sqrt{1+4(x+2)^2}\,dx}_{ds},$$

$$\begin{aligned}
A &= \int dA = 2\pi \int_1^3 (x+2)\sqrt{1+4(x+2)^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = 2(x+2) \\ dt = 2dx \end{bmatrix} = \\
&= \frac{\pi}{2}\int_6^{10} t\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}\left(1+t^2\right)^{3/2}\right]_6^{10} = \frac{\pi}{6}\left(101^{3/2} - 37^{3/2}\right)
\end{aligned}$$