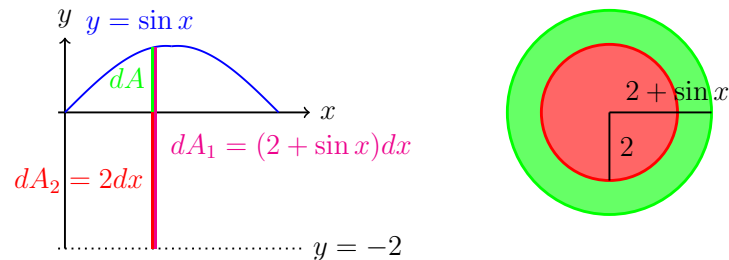


Exempel 4

- 1 Beräkna volymen av den kropp som uppstår när området $0 \leq y \leq \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, roteras ett varv kring linjen $y = -2$.
- 2 Ange, som en integral (som inte ska beräknas), arean av den yta som uppstår när kurvan $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, roteras ett varv kring linjen $y = -2$.

Lösning: Rita figur!



1 / 3

Exempel 4

Volymen dV som fås då areaelementet dA roteras blir en ring med yttre radie $2 + \sin x$, inre radie 2 och tjocklek dx , dvs

$$dV = dV_1 - dV_2 \quad \text{där}$$

$$dV_1 = \text{den volym som uppstår då } dA_1 \text{ roteras kring } y = -2 = \pi(2 + \sin x)^2 dx = \pi(4 + 4 \sin x + \sin^2 x) dx,$$

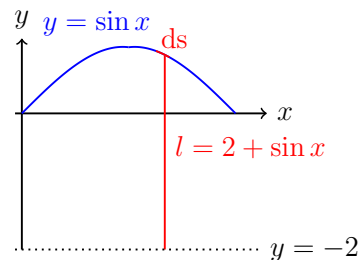
$$dV_2 = \text{den volym som uppstår då } dA_2 \text{ roteras kring } y = -2 = \pi 2^2 dx = 4\pi dx,$$

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \pi \int_0^\pi (4 + 4 \sin x + \sin^2 x - 4) dx = \\ &= \pi \int_0^\pi \left(4 \sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \pi \left[-4 \cos x + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^\pi = \\ &= \pi \left(-4 \cos \pi + \frac{\pi}{2} - (-4 \cos 0) \right) = 8\pi + \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

2 / 3

Exempel 4

Rita figur! När det gäller rotationsarean har vi *alltid* areaelementet $dA = 2\pi l ds$ där l = avståndet från rotationsaxeln till ds .



$$D(\sin x) = \cos x \implies ds = \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \implies$$

$$\implies A = \int dA = 2\pi \int_0^\pi \underset{=l}{(2 + \sin x)} \underset{=ds}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$$

3 / 3