Dagens ämnen

- Integrationsidén
- Plan area
  - Cartesiska koordinater (*xy*-system, dvs som vanligt)
  - Polära koordinater
- Kurvor på parameterform
- Kurvlängd
- Rotationsvolym

Integrationsidén

Storhet, Y som skall beräknas styckas upp i småbitar, ΔY som kan beskrivas som

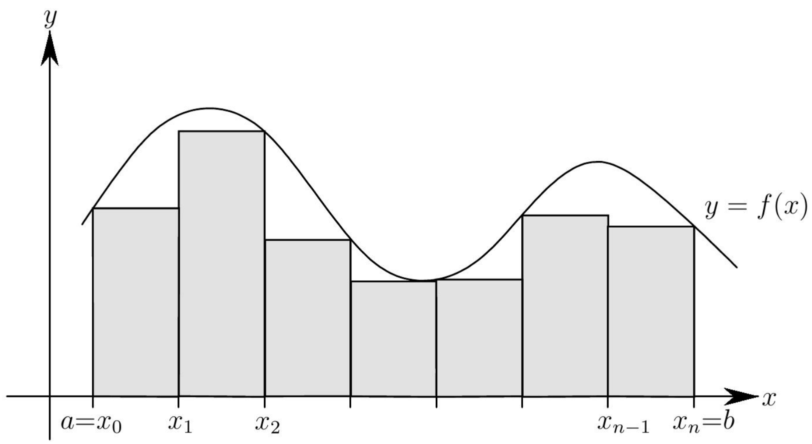
$$\Delta Y \approx f(t)\Delta t$$

där de blir "mer lika" ju mindre Δt blir.
Summeras bitarna fås

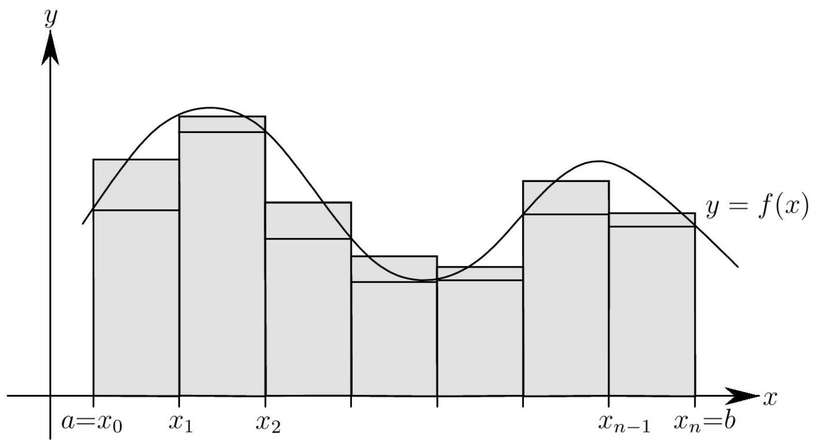
$$Y = \sum \Delta Y = \underbrace{\sum f(t)\Delta t}_{\text{Riemannsumma}} \to \int f(t)dt$$

då indelningens finhet $\to 0$

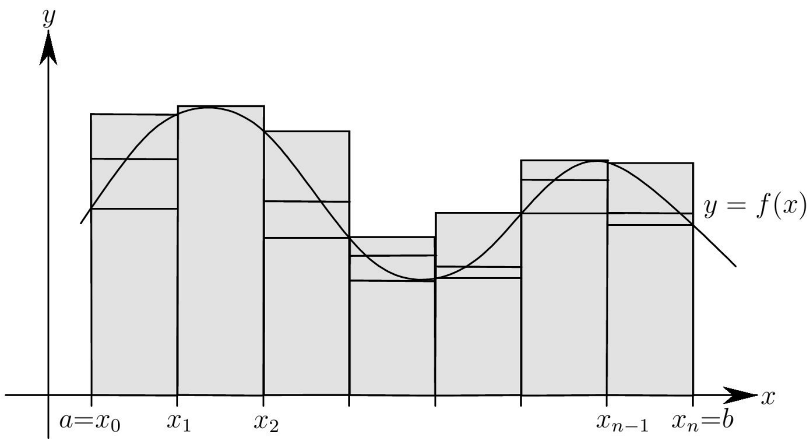
Undersumma



Riemannsumma

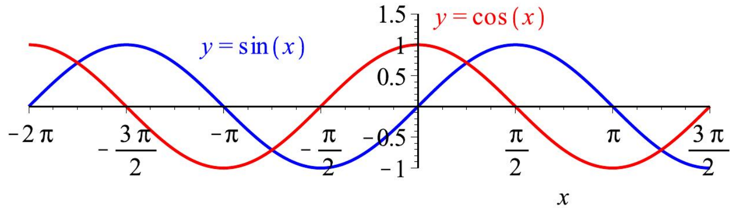


Översumma



Area mellan kurvor

Kurvorna $y = \cos x$ och $y = \sin x$. Vad är arean av en av "öglorna" mellan kurvorna?

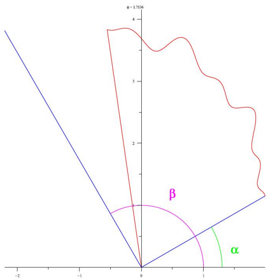


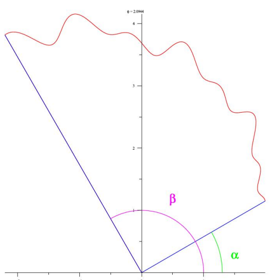
$$\text{Areaelementet} = dA = (f(x) - g(x))dx$$

$$A = \int dA = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \text{eller} \quad -\pi \le \varphi \le \pi$$

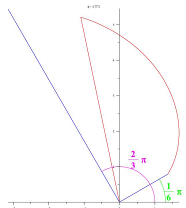


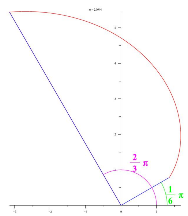


$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ 0 \le r \le h(\varphi), \ \alpha \le \varphi \le \beta\}$$

Area av område givet i polära koordinater

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ 0 \le r \le 3\varphi, \ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}\right\}$$





$$\text{I polära koordinater:} \quad dA = \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi$$

$$A = \int dA = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r(\varphi)^2 d\varphi$$

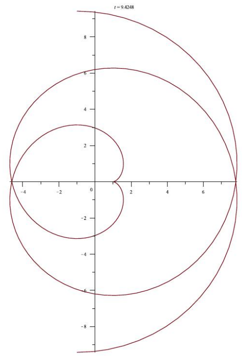
Kurvor på parameterform

$$\Gamma\colon \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \; a \le t \le b$$

Specialfallet då $y = f(x)$ parametriseras genom

$$\Gamma\colon \begin{cases} x = \quad t \\ y = f(t) \end{cases}, \; a \le t = x \le b$$

Kurvor på parameterform



Kurvan $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}, -3\pi \le t \le 3\pi$

Kurvlängd

Bågelementet $= ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$

$$S = \int ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

Funktionskurva $\quad y = f(x)$

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

$$S = \int ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Kurvlängd

Specialfall: Kurva given i polära koordinater

$$ds = \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}d\varphi$$

$$S = \int ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}d\varphi$$

Rotationsvolym

Rotation kring x-axeln. Skivformeln.
Volymselementet (skiva)

$$dV = \pi f(x)^2 dx$$

Rotation kring y-axeln. Rörformeln.
Volymselementet (rör)

$$dV = 2\pi x f(x) dx$$