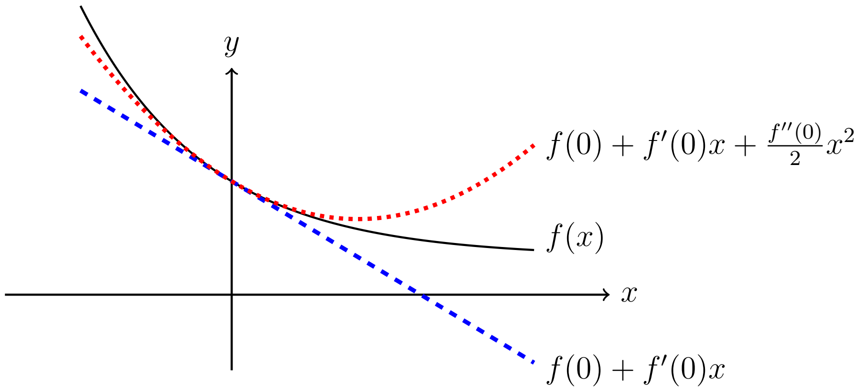
Föreläsning 1: Maclaurinutvecklingar

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

24 mars 2022

1 Introduktion

Tänk er följande situation. En snäll funktion f är given, men vi skulle vilja approximera den på något sätt med ett uttryck av enklare slag (polynom) som åtminstone är giltigt nära en given punkt $x = a$. Vanliga metoder som vi redan känner till inkluderar att bara approximera f med en konstant $f(a)$ (f:s värde i $x = a$) eller kanske med hjälp av tangenten till f i $x = a$. Båda metoderna är vettiga, men om vi behöver en bättre approximation då? Konstanten är ett polynom av grad noll och tangenten ett polynom av grad 1. Hur hittar vi en approximation av godtycklig grad n? Vi söker alltså ett polynom $p(x)$ som stämmer överens med f nära en punkt $x = a$. Låt oss illustrera vad vi menar.



Det verkar rimligt att välja koefficienterna i polynomet $p(x)$ så att $p(a) = f(a)$, $p'(a) = f'(a)$ och så vidare (att uttrycken har samma derivatorer upp till önskad ordning i $x = a$). Detta är också precis vad vi kommer att göra!

2 Expansion av snälla funktioner

Vi kan göra detta systematiskt när $x = 0$ med hjälp av en så kallad Maclaurinutveckling. Vi kommer hela tiden att kräva att funktioner är tillräckligt snälla (deriverbara) för vårt ändamål. I allmänhet kräver vi att f är kontinuerligt deriverbar $n + 1$ gånger om vi vill approximera med ett polynom av grad n. Vi skriver detta lite kortare som $f \in C^{n+1}$, underförstått att detta gäller nära origo. Vi kan utläsa detta som "f tillhör klassen av $(n + 1)$-gånger kontinuerligt deriverbara funktioner." Detta betyder att funktionen f, första derivatan f', andra derivatan f'' och så vidare till och med $f^{(n+1)}$ existerar och är kontinuerliga funktioner.

Maclaurinutveckling

Om $f \in C^{n+1}$ så gäller att

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r(x),$$

där *resten* $r(x)$ är liten nära noll. Polynomet

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

kallas för Maclaurinpolynomet för f av ordning n.

Observera att graden för p_n är högst n (det kan hända att termer försvinner på grund av att någon derivata är noll i origo).

Bevis. Vi utnyttjar upprepad partiell integration. Genom ett smart val av primitiv funktion, $\frac{d}{dt}(t-x) = 1$, erhåller vi att

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t)\,dt \\
&= f(0) + \big[(t-x)f'(t)\big]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)\,dt = f(0) + xf'(0) - \int_0^x (t-x)f''(t)\,dt \\
&= f(0) + xf'(0) - \left[\frac{(t-x)^2}{2}f''(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt \\
&= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt \\
&= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \left[\frac{(t-x)^3}{3!}f^{(3)}(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!}f^{(4)}(t)\,dt \\
&= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!}f^{(4)}(t)\,dt \\
&= \cdots = p_n(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{(t-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Här får vi ”på köpet” en representation av resten $r(x)$, nämligen att

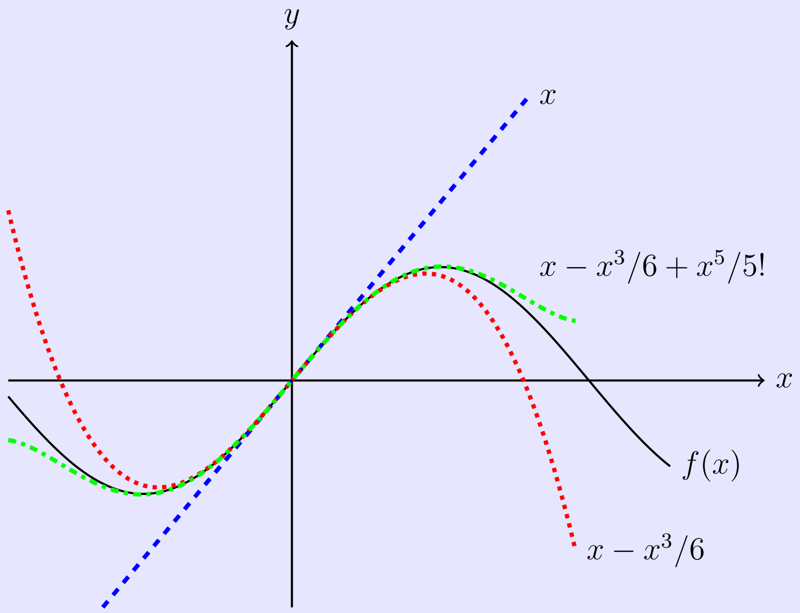
$$r(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(t-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Detta brukar kallas Lagranges restterm på integralform; vi återkommer till detta!

Det finns nu flera frågor. Vad menas med att resten är liten nära noll? Vad händer om vi är intresserade kring en punkt $x = a$ och $a \neq 0$? Innan vi svarar på dessa frågor, låt oss betrakta ett exempel.

Utveckling av $\sin x$

$$\begin{aligned}\sin x &= 0 + \cos 0 x + \frac{-\sin 0}{2!}x^2 \\ &+ \frac{-\cos 0}{3!}x^3 + \cdots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\end{aligned}$$



Desto fler termer vi tar med (ju högre grad polynomet p_n har), desto bättre stämmer polynomet överens med funktionen nära noll. Precis som önskat. Resttermen är helt enkelt felet

$$r(x) = f(x) - p_n(x).$$

Tydligt är att detta fel beror på både x och gradtalet n (och självklart funktionen f).

3 Resttermen

Hur hanterar vi resttermen? Ett sätt är att jämföra med uttryck av typen x^n som vi vet hur de beter sig nära noll. På grund av konstruktionen måste r uppfylla att

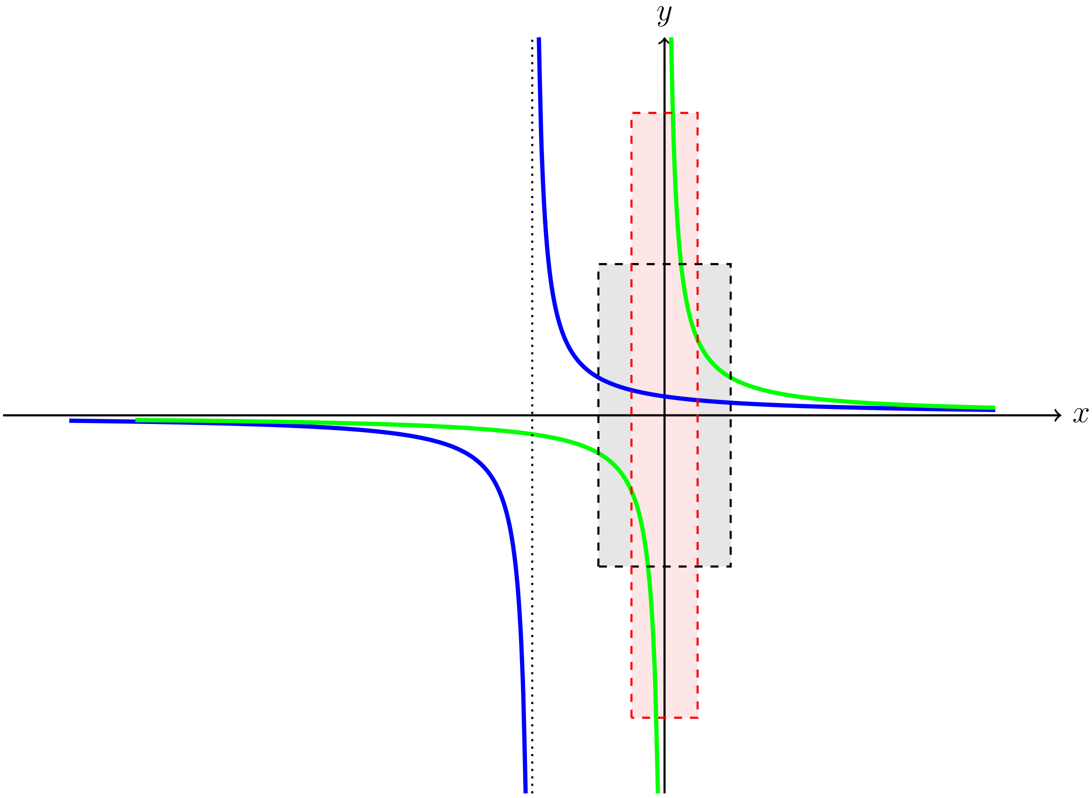
$$r(0) = r'(0) = r''(0) = \cdots = r^{(n)}(0) = 0$$

eftersom koefficienterna i $p_n(x)$ valts för just detta ändamål (visa detta!). Vidare följer det att $r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ (förutsatt att $f^{(n+1)}$ är definierad) eftersom $p_n^{(n+1)}(x)$ blir identiskt lika med noll. Det finns flera följder av denna likhet, och en variant som gör det enkelt för oss att räkna är att uttrycka restermen med hjälp av stora ordo.

Stora ordo

Definition. Vi säger att $f(x) = O(x^n)$ då x är nära noll om det finns en begränsad funktion $B(x)$ så att $f(x) = B(x)x^n$ för x nära noll.

En funktion begränsad nära noll är något som inte ”exploderar” när vi befinner oss nära origo. Skissar man en graf ska man kunna rita in grafen i en rektangel. Till exempel $\frac{1}{x}$ är **inte** begränsad nära origo. Men $\frac{1}{x+1}$ är begränsad nära nollan (men **inte** nära -1). Man bör alltså precisera i vilket område man menar när man säger att något är begränsat.



I figuren kan man se att det går att stänga in $1/(x+1)$ nära origo (svart rektangel), men det är omöjligt att rita en rektangel som täcker $1/x$ oavsett hur liten sidlängd man väljer parallellt med x-axeln (röda försöket). En bra sak att komma ihåg är att alla funktioner som är kontinuerliga nära origo är begränsade nära origo. Däremot behöver så klart inte en begränsad funktion vara kontinuerlig.
Vi kommer att ägna oss en hel del åt så kallade ordo-kalkyler. Följande samband gäller.

Egenskaper för stora ordo

För x nära noll och $m, n \geq 0$ gäller:

(i) $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$ om $m \leq n$ (”lägst vinner”);

(ii) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{m+n})$;

(iii) Om $f(x) = O(x^n)$ och $m \leq n$ så är $f(x) = O(x^m)$ (vi kan *sänka* exponenten);

(iv) $B(x)O(x^n) = O(x^n)$ om $B(x)$ är begränsad;

(v) $O(x^m)^n = O(x^{mn})$ och $O((O(x^m))^n) = O(x^{mn})$;

(vi) $O(x^n) \to 0$ då $x \to 0$ om $n > 0$.

Observera speciellt fallet (i) med $n = m$ och minus; vi har alltså

$$O(x^n) - O(x^n) = O(x^n).$$

Ordo-termer tar **aldrig** ut varandra eftersom det kan vara olika funktioner $B(x)$ i de olika uttrycken. Vi kan även ha negativa exponenter som till exempel $O\left(\frac{1}{x}\right)$, då ofta underförstått att detta gäller när $x \to \infty$ istället för nära noll (annars är ordo-termen inte liten). Vi kan även tänka oss uttryck som $O(|x|^\alpha)$ för α som inte är heltal. Viss försiktighet krävs dock så att allt är definierat ($\alpha = 1/2$ ger en kvadratrot som inte är så pigg på negativa tal som bekant, därav beloppet i uttrycket ovan). Ett annat speciellt fall är $O(1)$. Detta är alltså endast en begränsad funktion. I normala fall kan vi inte göra så mycket med detta uttryck så om det dyker upp behöver vi antagligen göra något annorlunda.

Exempel

Till exempel så gäller

$$\frac{x^2 + x^4 + O(x^5)}{x + x^3 + O(x^3)} = \frac{x^2(1 + x^2 + O(x^3))}{x + O(x^3)} = \frac{x^2(1 + x^2 + O(x^3))}{x(1 + O(x^2))} = x \cdot \frac{1 + x^2 + O(x^3)}{1 + O(x^2)},$$

och då bråket är begränsat nära noll (varför?) så är alltså allt lika med $O(x)$.

Man kan även hamna i situationen att man har potenser av uttryck som innehåller ordo-termer. Systematiskt kan man gå till väga som i följande exempel.

Exempel

Låt $t = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$. Då gäller att

$$\begin{aligned}
t^2 &= t \cdot t = \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)\right) = x^2 - x^3 + O(x^4), \\
t^3 &= t \cdot t^2 = \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)\right) \cdot \left(x^2 - x^3 + O(x^4)\right) = x^3 + O(x^4), \\
t^4 &= t \cdot t^3 = \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)\right) \cdot \left(x^3 + O(x^4)\right) = O(x^4),
\end{aligned}$$

När man har vanan inne kanske man tar lite genvägar...

Exempel

Om $t = x + O(x^2)$, vad är $1 + t + O(t^3)$?

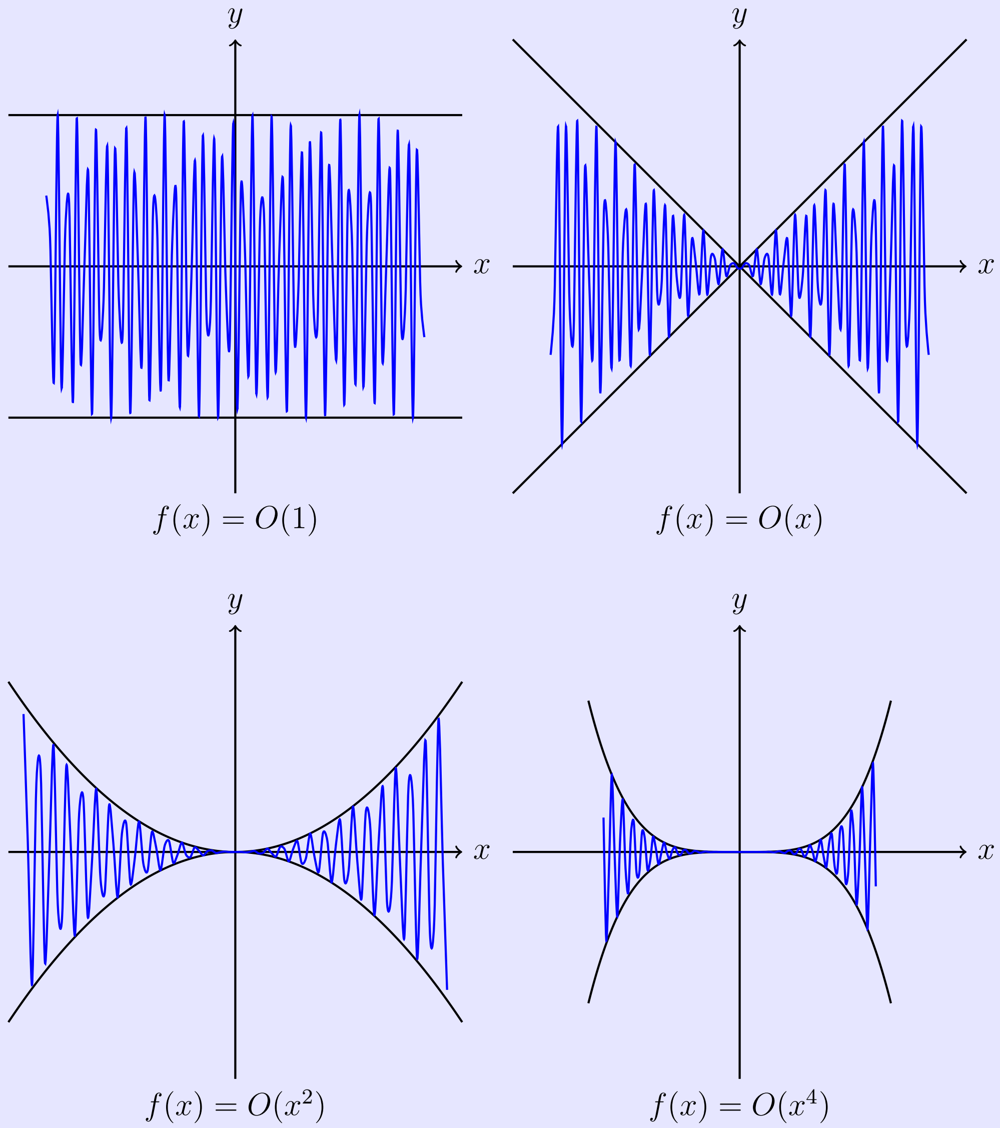
Lösning. Vi stoppar helt enkelt in vad t är och förenklar:

$$1 + t + O(t^3) = 1 + x + O(x^2) + O((x + O(x^2))^3) = 1 + x + O(x^2) + O(x^3) = 1 + x + O(x^2).$$

Här har vi undersökt $(x + O(x^2))^3$ och ser att den lägsta exponent som dyker upp är när termen $x \cdot x \cdot x$ dyker upp i produkten. Alltså måste detta uttryck vara $= O(x^3)$. Eftersom vi redan har en $O(x^2)$-term så tillför detta inget och vi erhåller svaret ovan.

Vad innebär det att $\mathbf{f(x) = O(x^n)}$?

Ofta handlar det om att beskriva hur snabbt en funktion $f(x)$ går mot noll (eller kvalitativt hur liten den är nära noll). Man kan då tänka sig att uttrycket i ordo-termen ger en gräns för hur stor $f(x)$ kan vara och mer eller mindre ”trycker ihop” grafen för $f(x)$ på ett visst sätt nära origo. Betrakta följande exempel (där $f(x)$ är den blåa kurvan).



Om f är tillräckligt snäll (i meningen deriverbar) kan man visa att följande samband gäller.

Om $f \in C^{n+1}$ nära origo så är $f(x) = p_n(x) + O(x^{n+1})$, där $p_n(x)$ är Maclaurinpolynomet av ordning n.

Bevis. Om vi erinrar oss Lagranges restterm på integralform kan vi skriva

$$f(x) = p_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Då måste

$$|r(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right| \leq \int_0^{|x|} \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)|\, dt$$
$$\leq \frac{|x|^n}{n!} \max_{|t|\leq|x|} |f^{(n+1)}(t)| \int_0^{|x|} dt = B(x)|x|^{n+1}.$$

Här är

$$B(x) = \frac{1}{n!} \max_{|t|\leq|x|} |f^{(n+1)}(t)|$$

begränsad på, tex, $-1 \leq x \leq 1$, eftersom $f^{(n+1)}(t)$ är en kontinuerlig funktion. Således måste $r(x) = O(x^{n+1})$.

Exempel

Maclaurinpolynomet av ordning n för $f(x) = e^x$ kan fås enkelt eftersom $f^{(n)}(x) = e^x$ för alla n, så $f^{(n)}(0) = 1$ och

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}).$$

Exempel

Vi utvecklar $f(x) = \cos x$. Då är $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$ och $f^{(4)}(x) = \cos x$. Sen börjar vi om med $-\sin x$ igen. Enligt formeln för Maclaurinutveckling erhåller vi nu

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6).$$

Polynomet $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!}$ är Maclaurinpolynomet av både ordning 4 och 5 samtidigt eftersom $f^{(5)}(0) = 0$ så x^5-termen saknas. Även om polynomet har grad 4 (inte 5). När man vet om situationer som denna är det lämpligt att skriva $O(x^6)$ eftersom detta är mer precist. Vet man däremot inte om att x^5-termen saknas måste man skriva $O(x^5)$.

Alla dessa ordo-termer ställer till lite bekymmer ibland (speciellt när man läser facit). Precis som ovan kan flera alternativ vara sanna men det betyder så klart inte att de är lika ”bra”. Ett annat exempel är $\sin x = x - x^3/6 + O(x^4)$ och $\sin x = x - x^3/6 + O(x^5)$? Båda är korrekta. Vilken skulle du välja? Det är den sista man brukar finna i tabeller, men vi alltid kan sänka exponenten i ordo-termen ty

$$O(x^5) = B_1(x)x^5 = xB_1(x)x^4 = O(x^4)$$

där $O(x^4) = B_2(x)x^4$ med $B_2(x) = xB_1(x)$. Vi flyttar alltså ett av x:en till den begränsade termen (vilket är ok då x är begränsad nära noll). Vi tappar alltså lite information men likheten är fortfarande sann. Vi kan skriva $O(x^3)$ också, men då försvinner x^3-termen in i ordo-termen. Slutsatsen blir att välja så hög exponent som möjligt. Den uppmärksamma läsaren har nu märkt något ganska underhållande: sekvensen av likheter kan endast läsas från vänster till höger! Var således lite försiktiga. Lösningen på det formella problemet är att använda andra beteckningar istället för likhet, alternativt skriva ut de begränsade funktionerna hela tiden.

Se upp med ordo-kalkylen!

Ett varningens ord inför tentan: slarva inte med ordo-termerna! Uppgifter med principfel i ordo-hantering brukar rendera noll poäng. Påstå inte att ett uttryck är mer precist än det är genom att svara med för hög ordo-term (typiska fel i stil med att påstå att vänsterled och högerled är samma i

$$(x + x^3 + O(x^5))^2 \neq x^2 + 2x^4 + O(x^{10})$$

där bästa korrekta ordo-termen i vänsterledet är $O(x^6)$) och att inte använda termer som är meningslösa på grund av närvaron av en ordo-term (tex $7x^3 + O(x^3)$).

4 Standardutvecklingar

Låt oss samla några vanliga utvecklingar som med fördel kan memoreras för att snabbt kunna användas. Samtliga kan härledas direkt från formeln för Maclaurinutvecklingar även om några stycken kan göras lite enklare med vissa trick (vi undersöker ett par närmare på nästa föreläsning).

Vanliga funktioner

(i) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + O(x^n)$

(ii) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$

(iii) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots \pm \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2k+2})$

(iv) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots \pm \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + O(x^{2k+1})$

(v) $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + \dfrac{62x^9}{2835} + O(x^{11})$

(vi) $$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})\end{aligned}$$

(vii) $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1})$

Utvecklingen av $\tan x$ kanske bör kommenteras. Koefficienterna som trillar ut följer ett mönster av s.k. Bernoullital, men detta ligger lite utanför kursen. Enklast kanske är att härleda de termer man behöver för situationen om inte tabellen finns tillgänglig eller memorerad.

Exempel

Visa att $(1+x)^\alpha$ har utvecklingen enligt tabellen ovan.

Lösning. Vi ska med andra ord härleda utvecklingen för $f(x) = (1+x)^\alpha$ när α är konstant (viktigt!). Så, om $\alpha \neq 1$ (vad händer om $\alpha = 1$?),

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},$$
$$f^{(4)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(1+x)^{\alpha-4}, \ \ldots,$$

vilket ger att

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \alpha, \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \qquad f^{(3)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2),$$
$$f^{(4)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3), \ \ldots .$$

Enligt Maclaurins formel blir således

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + \cdots . \end{aligned}$$

Egentligen kanske man borde visa att mönstret verkligen blir enligt ovan för godtyckligt k, men jag tycker det är ganska tydligt från härledningen.

Exempel

Hitta en utveckling för $\sqrt{1+3x^3}$ med resttermen $O(x^9)$.

Lösning. Vi låter $t = 3x^3$ och ser att

$$\begin{aligned} \sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}t^2 + O(t^3) \\ &= 1 + \frac{3x^3}{2} - \frac{(3x^3)^2}{8} + O((3x^3)^3) = 1 + \frac{3x^3}{2} - \frac{9x^6}{8} + O(x^9). \end{aligned}$$

Detta är ett typiskt sätt att använda standardutvecklingarna på. Märk att vi i nuläget inte kan vara helt säkra på att polynomet faktiskt är Maclaurinpolynomet, men vi återkommer till detta på nästa föreläsning.

Ett krångligare exempel? Visst, man kan göra saker hur bökiga som helst!

Exempel

Finn en utveckling för $\cos(\sin x)$ av ordning 5.

Lösning. Låt $t = \sin x$. Då är $t = x - \dfrac{x^3}{3!} + O(x^5)$, t är nära noll när x är nära noll (**viktigt!**), och

$$\begin{aligned}
\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x + O(x^3)\right)^4 + O(t^6) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + O(x^6) + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) + O((x + O(x^3))^6) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} + O(x^6).
\end{aligned}$$

Vad händer om vi betraktar $\sin(\cos x)$ istället? Undersök saken och var försiktig med ordotermen!

5 Taylorutvecklingar

Vi har nämnt problemet tidigare: vad händer om vi vill approximera f kring en punkt $x = a$ istället där $a \neq 0$? Vi kommer åt detta problem genom att betrakta $g(t) = f(t + a)$, så vi låter alltså $t = x - a$. Genom en Maclaurinutveckling av g erhåller vi då följande:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n + O(t^{n+1})$$

Här är $g(0) = f(a)$, $g'(0) = f'(a)$, och så vidare, och vi kan formulera uttrycket i variabeln x i stället. Vi summerar resultatet i följande sats.

Taylorutveckling

Om f är en $(n + 1)$-gånger kontinuerligt deriverbar funktion nära $x = a$ så är

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + O((x - a)^{n+1}).$$

Observera här att termen $O((x - a)^{n+1})$ är liten när x är nära a i stället för när x är nära noll. Detta är viktigt! Konstruktionen med $g(t) = f(t + a)$ gör att vi i princip alltid kan anta att $a = 0$ när vi bevisar satser. Med andra ord gäller motsvarande satser för Taylorutvecklingar som gäller för Maclaurinutvecklingar.

Exempel

Finn Taylorutvecklingen för $\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ kring $x = 3$ av ordning 2 med restterm på ordo-form.

Lösning. Låt $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$. Då är

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x/2)^2} = \frac{1}{2+x^2/2} \quad \text{och} \quad f''(x) = -\frac{x}{4\left(1+x^2/4\right)^2}.$$

Vi söker utvecklingen kring $x = 3$, så $a = 3$ i satsen ovan. Således erhåller vi att

$$f(3) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right), \quad f'(3) = \frac{1}{2+9/2} = \frac{2}{13}, \quad \text{samt } f''(3) = -\frac{3}{4\left(1+3^2/4\right)^2} = -\frac{12}{169}.$$

Enligt satsen ovan ser vi att

$$\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{13}(x-3) - \frac{6}{169}(x-3)^2 + O((x-3)^3).$$

Självklart kan man i princip alltid likt vid härledning av Maclaurinutvecklingar använda satsen ovan direkt (derivera och räkna ut $f(a)$, $f'(a)$ och så vidare, precis som i exemplet ovan) men ofta kan vi rädda situationen med en känd Maclaurinutveckling. Hur? Vi betraktar ett par exempel för att illustrera.

Exempel

Maclaurinutveckla polynomet $x^4 + 2x^2 - 3x + 4$ till ordning 2. Utveckla även polynomet $x^4 + 2x^2 - 3x + 4$ kring $x = 1$ med ordning 2.

Lösning. Maclaurinpolynomet av ordning 2 ges av $2x^2 - 3x + 4$ och utvecklingen kan skrivas

$$x^4 + 2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 - 3x + 4 + O(x^3).$$

Nu råkar x^3-termen saknas så vi skulle lika gärna (bättre) kunna skriva $O(x^4)$. Vad händer när vi söker en Taylorutveckling kring $x = 1$? Enklast är ofta att låta $t + 1 = x$ eftersom vi då har x nära ett när t nära noll. Alltså,

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 - 3x + 4 &= (t+1)^4 + 2(t+1)^2 - 3(t+1) + 4 \\ &= 1 + 4t + 6t^2 + 4t^3 + t^4 + 2(t^2 + 2t + 1) - 3(t+1) + 4 \\ &= 4 + 5t + 8t^2 + O(t^3) = 4 + 5(x-1) + 8(x-1)^2 + O((x-1)^3). \end{aligned}$$

Här kan vi **inte** skriva $O((x-1)^4)$ eftersom det finns en t^3-term. Det kan alltså bli skillnad beroende på vilken punkt vi arbetar i (inte så förvånande om vi tänker efter).

Exempel

Taylorutveckla $1 + \sin(x)$ kring $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Vi låter $x = t + \dfrac{\pi}{2}$. Om x är nära $\dfrac{\pi}{2}$ så är t nära 0. Vi Maclaurinutvecklar då

$$g(t) = f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cos t = 2 - \frac{t^2}{2} + O(t^4) = 2 - \frac{(x - \pi/2)^2}{2} + O((x - \pi/2)^4),$$

där vi använt den kända trigonometriska formeln $\sin(t + \pi/2) = \cos t$, $t \in \mathbf{R}$.

6 Tillämpningar

En vanlig tillämpning för Maclaurinutvecklingar är beräkning av gränsvärden.

Exempel

Beräkna $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Vi löser detta genom att Maclaurinutveckla $\sin x$ (se tidigare exempel):

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - (x^3/6) + O(x^5)}{x} = 1 + O(x^2) \to 1, \text{ då } x \to 0.$$

Vi kan alltså Maclaurinutveckla uttryck istället för att memorera standardgränsvärden!
Nästa föreläsning kommer att innehålla massvis med fler tillämpningar!