Föreläsning 3: Restterm på Lagranges form

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

24 mars 2022

1 Lagranges form för resttermen

Vi har tidigare använt resttermen på ordo-form med goda resultat. Oftast i samband med gränsvärden, extrempunktsundersökningar eller andra lokala egenskaper. Vad kan man göra om man vill ha ett resultat som gäller globalt, eller åtminstone på ett förutbestämt intervall kring en punkt? Vi behöver alltså en mer precis kontroll på hur felet i utvecklingen beter sig.

Lagranges form

Om $f \in C^{n+1}$ nära $x = 0$ så kan resttermen $r(x)$ i Maclaurinutvecklingen av ordning n för f skrivas

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x \text{ för varje fixt } x \text{ nära origo.}$$

Bevis. Kom ihåg från föreläsning 1 att $r(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$. Eftersom $(x-t)^n \geq 0$ för t mellan 0 och x, samt att både $(x-t)^n$ och $f^{(n+1)}(t)$ är kontinuerliga, kan vi använda medelvärdessatsen för integraler som säger att det för varje x finns ett tal ξ mellan 0 och x så att

$$r(x) = f^{(n+1)}(\xi) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt = f^{(n+1)}(\xi) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)\cdot n!} \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

Beroende på vad du vill åstadkomma, se till att du väljer rätt form på resttermen!

(i) Vid undersökning av *lokala* egenskaper (såsom gränsvärden, kontinuitet, extremvärden) så brukar en ordo-term duga för att svara på frågan.

(ii) Om vi behöver information vid en specifik punkt $x = a$ där vi inte utvecklar i just $x = a$, eller om vi vill ha information som gäller på ett helt intervall, så *måste* vi använda Lagrange restterm. Det är ett principfel att trycka in en ordo-term i dessa sammanhang!

”Funktionen” ξ

Observera att detta är punktvis. För varje fixt x har vi resttermen på denna form. Talet ξ beror alltså på vilket värde x har och bör därför egentligen betraktas som en funktion $\xi(x)$ av x. Detta kan ställa till det om man inte är försiktig. På det sättet vi kommer att använda Lagranges form kommer vi dock inte att påverkas då vi hela tiden kommer jobba med så kallade *likformiga* uppskattningar (som gäller för alla värden i något fixt intervall för den variabel vi betraktar). Däremot kan funktionen $\xi(x)$ potentiellt vara ordentligt elak (vi vet inte hur den ser ut eftersom den definieras via medelvärdessatsen för varje x). Det går alltså inte att derivera resttermen $r(x)$ på Lagranges form hur som helst och även integration bör utföras försiktigt där man helst uppskattat bort allt ξ-innehåll innan någon integral dyker upp.

Ibland skriver man $\xi = \theta x$, där $\theta \in [0, 1]$ för att markera att ξ beror på x. Observera här att även θ varierar när vi ändrar x, men är begränsad mellan 0 och 1.

Låt oss betrakta ett exempel.

Exempel

Låt $f(x) = (1 + x)^5$. Vi vet från binomialsatsen precis hur detta ser ut (Pascals triangel och så vidare). Alltså,

$$f(x) = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

för alla x. Låt oss utveckla f till ordning 3. Då är

$$f(x) = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + r(x)$$

där $r(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4$. Det är tydligt att vi måste ändra ξ beroende på hur vi väljer x. Detta är klart eftersom vi *vet* att $r(x) = 5x^4 + x^5$ och det är det enda sättet dessa två uttryck kan matchas på:

$$\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = 5x^4 + x^5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = 5 + x \quad \Leftrightarrow \quad 5\xi + 5 = 5 + x \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \frac{x}{5}$$

om $x \neq 0$ då $f^{(4)}(\xi) = 120\xi + 120$, vilket ger ett ξ som beror på x (linjärt till och med!). I det generella fallet beror så klart inte ξ så enkelt på x, men exemplet visar att ett beroende ganska direkt uppstår.

För motsvarande Taylorutveckling kan resttermen skrivas $r(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$ där ξ ligger mellan x och a (och x nära a är fixt).

2 Tillämpningar

Så vad kan vi använda detta till? I princip de situationer då vi inte enbart är intresserade av vad som händer (väldigt) nära en viss punkt. Allt från att visa att en viss Maclaurinutveckling *konvergerar* på något intervall då vi fortsätter mot oändligheten med antalet termer till att vi kanske mer precist vill uppskatta en integral där vi inte känner till någon elementär primitiv funktion. Vi fortsätter nu alltså med en rad exempel på hur vi kan använda oss av Lagranges form på resttermen. Först sammanfattar vi stegen som ofta ingår i användandet av Lagranges restterm.

Vanliga tekniker

- I allmänhet gör vi ett byte först och utvecklar en standardutveckling och sen pluggar in den gamla variabeln i resttermen för den enkla utvidgningen. Se till att hålla koll här på vart ξ ligger.
- Försök få en uppfattning om storleksordningen på $r(x)$ för olika n. Hur stort n krävs? Är det överhuvudtaget möjligt?
- Räkna ut derivatan $f^{(n)}$. Tips kan fås från hur Maclaurinutvecklingen ser ut (men den räcker inte!).
- Uppskatta resttermen så att vi får bort ξ. Utgå från det värsta som är möjligt på det intervall vi arbetar.

Låt oss räkna några exempel för att förtydliga.

Exempel

Skriv upp resttermen $r(x)$ på Lagranges form för utvecklingen av ordning 11 för $\dfrac{1}{1+x^3}$.

Lösning. Låt $g(t) = (1+t)^{-1}$. Vi betraktar

$$g(t) = (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + r(t),$$

där $r(t) = \dfrac{g^{(4)}(\xi)}{4!}t^4$ med ξ mellan 0 och t. Varför stannar vi vid $n = 3$? Jo, vi kommer ersätta t med x^3, så då får vi med allt upp till ordning 11. Eftersom $g^{(4)}(t) = \dfrac{24}{(1+t)^5}$ (detta måste räknas ut) så har vi alltså

$$r(t) = \frac{24}{4!(1+\xi)^5}t^4 = \frac{1}{(1+\xi)^5}t^4, \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } t.$$

Varför inte skriva $0 \leq \xi \leq t$? Faktum är att vi inte vet om t är positiv eller negativ så då behövs lite belopp här och där för att vara säkra. Enklare att uttrycka saken med ord! Vi återgår till x:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^3} &= 1 - x^3 + x^6 - x^9 + r(x^3) \\ &= 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \frac{x^{12}}{(1+\xi)^5}, \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x^3.\end{aligned} \tag{$\star$}$$

Observera att kravet på ξ nu ändrats till motsvarande krav för x. Detta är viktigt! Vi kan också jämföra med att direktutveckla $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$. Då blir Maclaurinpolynomet detsamma (givetvis) och resttermen får formen

$$\frac{f^{(12)}(\xi)x^{12}}{12!} = \Big(531441\,\frac{\xi^{24}}{(1+\xi^3)^{13}} - 1948617\,\frac{\xi^{21}}{(1+\xi^3)^{12}} + 2854035\,\frac{\xi^{18}}{(1+\xi^3)^{11}}$$
$$- 2125764\,\frac{\xi^{15}}{(1+\xi^3)^{10}} + 847098\,\frac{\xi^{12}}{(1+\xi^3)^{9}} - 173502\,\frac{\xi^{9}}{(1+\xi^3)^{8}} \qquad (\spadesuit)$$
$$+ 15849\,\frac{\xi^{6}}{(1+\xi^3)^{7}} - 450\,\frac{\xi^{3}}{(1+\xi^3)^{6}} + \frac{1}{(1+\xi^3)^{5}}\Big)x^{12}.$$

En naturlig fråga nu är så klart hur detta resultat kan stämma överens med ($\star$) eftersom de båda uttrycken ser ordentligt olika ut. Tänk dock på att det är **olika** ξ i de två uttrycken. Det enda vi påstår är att för varje x finns ett ξ_1 mellan 0 och x^3 och ett ξ_2 mellan 0 och x så att resttermen i ($\star$) får samma numeriska värde som ($\spadesuit$), med $\xi = \xi_1$ respektive $\xi = \xi_2$. Så båda varianterna ger en korrekt likhet. Vilken skulle du välja att arbeta med?

Exempel

Visa att $\left|\frac{1}{1+x^3} - (1 - x^3 + x^6 - x^9)\right| \le \left(\frac{8}{7}\right)^5 |x|^{12}$ för $|x| \le \frac{1}{2}$.

Lösning. Det enda som blir kvar inne i absolutbeloppet är resttermen vi tog fram i föregående exempel. Eftersom $|x| \le \frac{1}{2}$ är $-\frac{1}{8} \le x^3 \le \frac{1}{8}$. Då blir $1 + \xi \ge 1 - \frac{1}{8}$ eftersom ξ ligger mellan 0 och x^3. Alltså blir

$$\left|\frac{1}{(1+\xi)^5}x^{12}\right| \le \frac{|x|^{12}}{(1-\frac{1}{8})^5} = \left(\frac{8}{7}\right)^5 |x|^{12}.$$

Här var det alltså viktigt vilka värden ξ kan anta!

Likformig approximation på ett intervall

Hitta ett polynom $p(x)$ så att $\left|\frac{1}{1+x^3} - p(x)\right| \le 10^{-3}$ för $|x| \le \frac{1}{2}$.

Lösning. Enligt ovan, låt $p(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9$. Då gäller att

$$\left|\frac{1}{1+x^3} - p(x)\right| \le \left(\frac{8}{7}\right)^5 |x|^{12} \le \frac{8^5 2^{-12}}{7^5} = \frac{8}{49^2 \cdot 7} = \frac{8}{2401 \cdot 7} < \frac{8}{2400 \cdot 5} < 10^{-3},$$

för alla $|x| \le \frac{1}{2}$.

2.1 Uppskattningar av funktionsvärden

Typiskt skulle man kunna vilja veta approximativ vilket värde en given funktion har i en viss punkt $x = a$. Ett sätt är att approximera funktionen med dess Maclaurinpolynom, som går lätt att räkna ut numeriskt i en viss punkt (till exempel $x = a$). Felet i denna uppskattning måste dock vara under kontroll, så vi behöver använda Lagranges restterm med $x = a$ och se hur stort detta blir.

Exempel

Uppskatta talet $\cos\frac{1}{4}$ med ett fel $< 10^{-6}$.

Lösning. Vi vet att

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos\xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Resten kan vi uppskatta (för $x = 1/4$) med

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{\cos\xi}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{1}{4^{2n+2}(2n+2)!} \quad \text{eftersom } |\cos\xi| \leq 1.$$

Vi kan nu testa n för att se när detta blir $< 10^{-6}$. Vi ser att $n = 1$ inte duger men med $n = 2$ erhåller vi

$$\frac{1}{4^{4+2}(4+2)!} = \frac{1}{2^{12} \cdot 6!} < \frac{1}{4000 \cdot 500} = 0.5 \cdot 10^{-6}.$$

Alltså är

$$\cos\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{32} + \frac{1}{6144} + R$$

där $|R| < 10^{-6}$.

Exempel

Uppskatta $\sqrt{3}$ med ett fel $< 10^{-3}$.

Lösning. Att försöka utveckla $\sqrt{3} = \sqrt{1+2}$ visar sig väldigt svårt då $x = 2$ är för stort. Vi försöker skriva om $3 = \dfrac{3 \cdot 25 \cdot 81}{25 \cdot 81}$, och ser då att

$$\sqrt{3} = \frac{9}{5}\sqrt{\frac{75}{81}} = \frac{9}{5}\sqrt{1 - \frac{6}{81}},$$

vilket verkar mer lovande. Vad vi gjort är att vi förlängt 3:an med en kvadrat och sen introducerat en annan kvadrat av ungefär samma storlek. På så sätt får vi något nära ett inne i roten när vi bryter ut jämna kvadrater. Vi utvecklar $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{\frac{3}{8}(1+\xi)^{-5/2}}{3!} x^3,$$

där ξ ligger mellan 0 och x (och vårt $x = -6/81$). Vi uppskattar resttermen (för hela utvecklingen) för att se om detta räcker:

$$\left| \frac{9}{5} \cdot \frac{\frac{3}{8}(1+\xi)^{-5/2}}{3!} x^3 \right| \leq \frac{9|x|^3}{5 \cdot 16 (1+\xi)^{5/2}}.$$

Eftersom ξ ligger mellan 0 och $x = -6/81$ blir nämnaren som värst $1 - 6/81 = 75/81$. Vi kan då uppskatta att

$$(1+\xi)^{5/2} \geq \left(\sqrt{\frac{75}{81}} \right)^5 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{9} \right)^5 > \left(\frac{5 \cdot \frac{3}{2}}{9} \right)^5 = \left(\frac{5}{6} \right)^5$$

där vi utnyttjat att $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$. Nu kan vi uppskatta resttermen med

$$\frac{9 \cdot 6^3 \cdot 6^5}{5 \cdot 81^3 \cdot 16 \cdot 5^5} = \frac{16}{9 \cdot 5^6} < \frac{2}{5^6} < \frac{2}{100^2} < 10^{-3}.$$

Alltså har vi

$$\sqrt{3} = \frac{9}{5}\left(1 - \frac{3}{81} - \frac{36}{8 \cdot 81^2}\right) + R = \frac{1403}{810} + R$$

där $|R| \leq 10^{-3}$.

2.2 Integralkalkyl

Man kan även hitta approximativa värden för numeriska integraler. Detta åstadkoms genom att man approximerar integranden med dess Maclaurinpolynom. Problemet ligger i att vi behöver ha kontroll över hur resttermen beter sig över **hela** integrationsområdet. Det räcker alltså inte med resttermen på ordo-form, utan vi behöver använda oss av Lagranges restterm.

Exempel

Beräkna approximativt $\int_0^{1/8} \sqrt{1+4x^3}\, dx$ med ett fel som är $< 10^{-9}$.

Lösning. Vi utvecklar integranden och låter $t = 4x^3$:

$$\sqrt{1+4x^3} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + r(t) = 1 + 2x^3 - 2x^6 + r(4x^3),$$

där $r(t) = \frac{\frac{3}{8}(1+\xi)^{-5/2}}{3!}t^3$ för något ξ mellan noll och t. Vi uppskattar $r(4x^3)$ genom

$$|r(4x^3)| \leq \frac{3}{8 \cdot 3!}(4x^3)^3 = 4x^9$$

eftersom $1 + \xi \geq 1$ då ξ ligger mellan 0 och x^3 samt $x \geq 0$. Alltså är

$$\begin{aligned}\int_0^{1/8} \sqrt{1+4x^3}\, dx &= \left[x + \frac{x^4}{2} - 2\frac{x^7}{7}\right]_0^{1/8} + \int_0^{1/8} r(4x^3)\, dx \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{13}} - \frac{1}{7 \cdot 2^{20}} + \int_0^{1/8} r(4x^3)\, dx,\end{aligned}$$

där

$$\left|\int_0^{1/8} r(4x^3)\, dx\right| \leq \int_0^{1/8} |r(4x^3)|\, dx \leq 4\int_0^{1/8} x^9\, dx = \frac{2}{5}\left[x^{10}\right]_0^{1/8} \leq \frac{1}{8^{10}} = \frac{1}{2^{30}}.$$

Eftersom $2^{30} = 1024^3 > 10^9$ så är felet $< 10^{-9}$.

2.3 Konvergens?

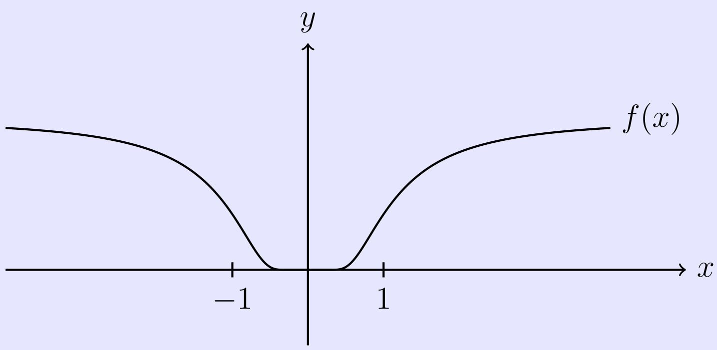
En ganska naturlig fråga är så klart vad som händer om vi tar med oändligt många termer i Maclaurinpolynomet (och vad det skulle betyda). Ett sett att resonera på är att analysera resttermen och se vad som händer med den när antalet termer går mot oändligheten. Ett annat sätt är att stirra på polynomet och fundera. Följande exempel är ganska intressant med tanke på att samtliga Maclaurinpolynom är identiskt lika med noll.

Konvergens av utvecklingar

Ibland kan man hamna i urartade situationer. Ta till exempel följande funktion:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Denna funktion är intressant då $f^{(n)}(0) = 0$ för varje positivt heltal n (visa det). Alltså är **alla** Maclaurinkoefficienter lika med noll och alla Maclaurinpolynom $p_n(x) = 0$ för alla x. Man kan tänka sig att detta aldrig kan vara en bra approximation, men låt oss rita hur f ser ut:



Verkar inte helt galet ändå! Tydligt att approximationen inte fungerar när vi flyttar oss för långt från origo, vilket är ett fenomen som inträffar då och då. Däremot är detta ett exempel på en funktion där alla termer stämmer överens med Maclaurinpolynomet, men även om man tar med oändligt många termer blir det bara likhet i en enda punkt ($x = 0$). Vi återkommer till problemet att hitta *konvergensområden* senare (potensserier).