Föreläsning 5: Differentialekvationer av första ordningen och integralekvationer

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

24 mars 2022

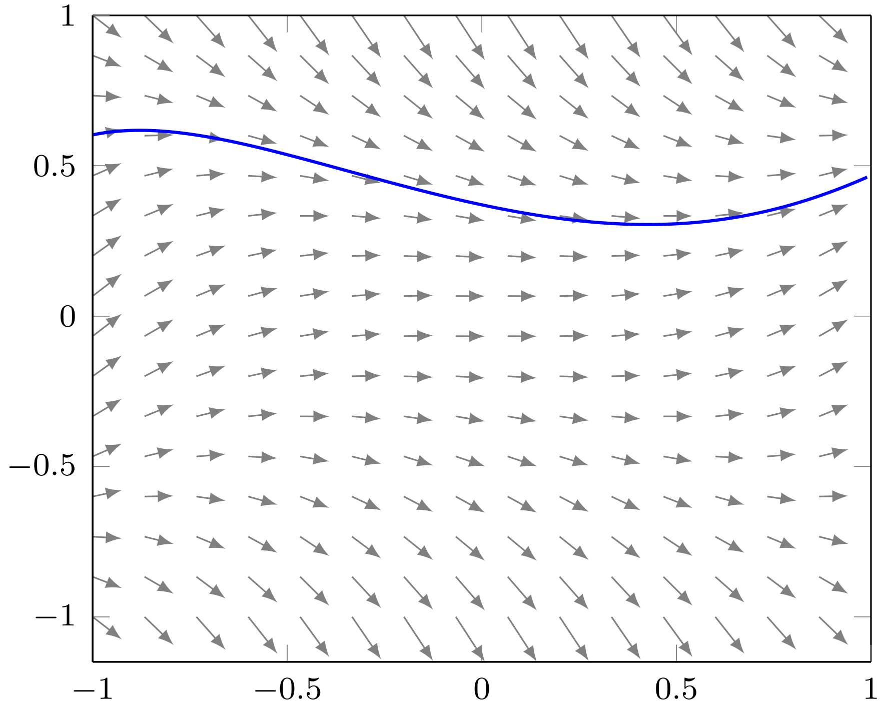
1 Introduktion

En differentialekvation (DE) i en variabel är en ekvation som innehåller både variabeln (ofta x), en okänd funktion $y(x)$ samt derivatorer av $y(x)$ som $y'(x)$, $y''(x)$ och så vidare. Man skriver ofta $F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$ där F är någon funktion av flera variabler. Med en lösning till en DE menar vi en funktion y, definierad på något intervall $]a, b[$ (möjligen $a = -\infty$ och $b = \infty$) där y uppfyller $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots) = 0$ för $x \in]a, b[$. Med andra ord uppfyller alltså funktionen y DE:n i varje punkt $x \in]a, b[$. Vi börjar med att betrakta fallet med första ordningens differentialekvationer (DE). Ordningen på en DE definieras som den högsta derivatan den innehåller, så en DE av första ordningen innehåller alltså bara y och y' (förutom variabeln x). Ett väldigt enkelt exempel är till exempel

$$y'(x) = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = C + \sin x,$$

där $C \in \mathbf{R}$ är en godtycklig konstant. Här kunde vi direkt integrera båda sidor i ekvationen. Om DE:n däremot även innehåller y-termer och kanske krångligare varianter av y' så är det inte säkert att vi kan lösa problemet.

Om en DE kan skrivas på formen $y' = F(x, y)$ (att det går att lösa ut y' och isolera på en sida i en ekvation) kan man dock rita upp vad som kallas för ett riktningsfält för DE:n. Ekvationen ger för varje (x, y) i planet vad y' måste vara. Detta ger information om funktionen y växer eller avtar. Vi ritar upp ett exempel för DE:n $y' = x^2 - 2y^2$:



Pilarna i riktningsfältet visar hur lösningskurvor går (kurvor $y(x)$ alltså). Den heldragna kurvan är en av alla lösningar $y(x)$ som finns till ekvationen $y' = x^2 - 2y^2$.

2 Linjära DE av första ordningen

Definition. Om $y' + f(x)y = g(x)$ kallar vi DE:n för en linjär DE av första ordningen.

Dessa ekvationer kan lösas med hjälp av en så kallad *integrerande faktor*. Vi finner en sådan genom att välja **en** primitiv funktion F till f (dvs en funktion F så att $F' = f$) och sedan bilda $e^{F(x)}$ som är den integrerande faktorn. Namnet kommer från följande egenskap. Vi multiplicerar DE:n med $e^{F(x)}$ och utnyttjar sedan produktregeln för derivering:

$$\begin{aligned}
y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad e^{F(x)}y'(x) + f(x)e^{F(x)}y(x) = g(x)e^{F(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(e^{F(x)}y(x)\right)' = g(x)e^{F(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{F(x)}y(x) = C + \int g(x)e^{F(x)}\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{-F(x)} + e^{-F(x)}\int g(x)e^{F(x)}\,dx.
\end{aligned}$$

Vi ser här att om $g(x) = 0$ fås specialfallet $y(x) = Ce^{-F(x)}$ och om $f(x) = 0$ fås specialfallet $y(x) = C + \int g(x)\,dx$.

Här har vi dessutom visat entydighet för lösningar. Om ett villkor av typen $y(a) = \alpha$ för något a och α är givet finns bara ett värde på konstanten C som gör att $y(x)$ uppfyller detta. Vad vi gör här är alltså att vi bestämmer en punkt i planet som lösningskurvan ska gå genom; jämför med riktningsfältet ovan (även om den ekvationen **inte** är linjär). Genom varje punkt går det precis en lösning och olika lösningar korsar aldrig varandra. Den här typen av entydighet har man inte alltid om ekvationen inte är linjär.

Exempel

Lös ekvationen $y' + 3y = 2$.

Lösning. En av de enklare typerna av ekvationer vi kan få. En integrerande faktor fås som e^{3x} eftersom $(3x)' = 3$ är faktorn före y. Alltså,

$$\begin{aligned} y' + 3y = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{3x}y' + 3e^{3x}y = 2e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad \left(ye^{3x}\right)' = 2e^{3x} \\ &\Leftrightarrow \quad ye^{3x} = C + \int 2e^{3x}\,dx = C + \frac{2}{3}e^{3x} \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{-3x} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Observera här att Ce^{-3x} löser den homogena ekvationen $y' + 3y = 0$ för alla C. Konstanten $\frac{2}{3}$ brukar kallas för en *partikulärlösning* till $y' + 3y = 2$. Idén att konstruera den allmänna lösningen till $y' + 3y = 2$ genom lösningar till den homogena ekvationen och en partikulärlösning är ett exempel på *superpositionsprincipen* som finns för linjära ekvationer. Denna teknik återkommer vi till.

När dyker konstanten C upp?

Konstanten dyker upp i samband med att vi tar bort derivatan (eftersom man tappar konstanten när man deriverar). Alternativt kan man se det som att konstanten hör ihop med den obestämda integralen (den primitiva funktionen). Båda alternativen går bra, men se till att konstanten dyker upp innan du gör någon drastiskt med ekvationen som att förkorta bort saker eller multiplicera ekvationen med något (som till exempel e^{-3x} ovan).

Exempel

Finn alla lösningar till $y' = xy + x^3$ och bestäm speciellt de tre lösningar som uppfyller villkoren $y(0) = 0$, $y(0) = -1$ och $y(-1) = -1$.

Lösning. Vi söker en integrerande faktor och finner den som $e^{-x^2/2}$ eftersom $-x^2/2$ är en primitiv funktion till $-x$ (faktorn före y om allt som har med y att göra flyttas till vänsterledet). Vi testar:

$$\left(e^{-x^2/2}y\right)' = -xe^{-x^2/2}y + e^{-x^2/2}y' = e^{-x^2/2}\left(y' - xy\right).$$

Detta är alltså ok. Då erhåller vi

$$y' = xy + x^3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{-x^2/2}y\right)' = x^3e^{-x^2/2} \quad \Leftrightarrow \quad y = Ce^{x^2/2} + e^{x^2/2}\int x^3e^{-x^2/2}\,dx.$$

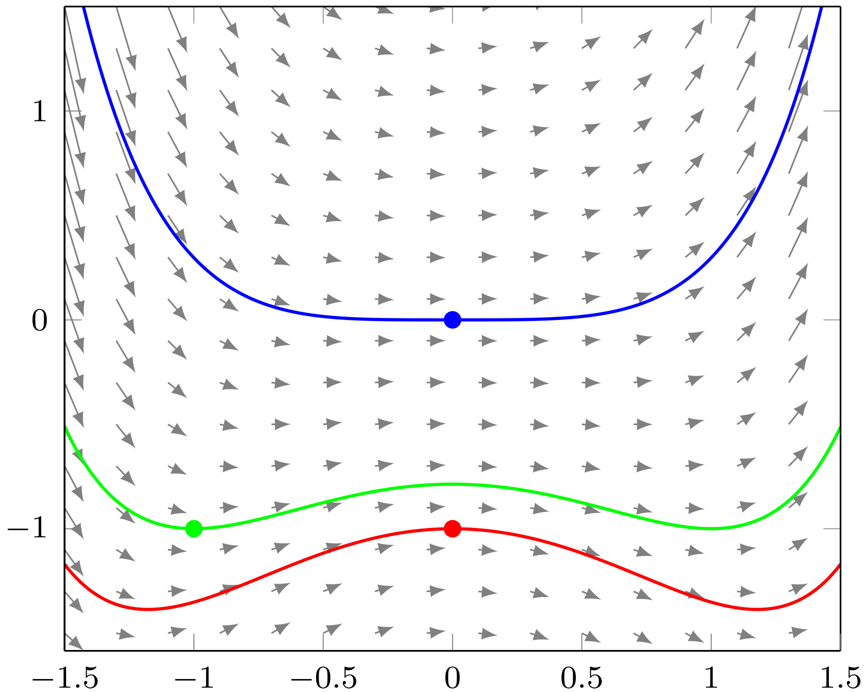
Vi räknar ut integralen med PI:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-x^2/2}\,dx &= \int x^2\left(xe^{-x^2/2}\right)\,dx\\ &= -x^2e^{-x^2/2} + 2\int xe^{-x^2/2}\,dx\\ &= -x^2e^{-x^2/2} - 2e^{-x^2/2} = -(2+x^2)e^{-x^2/2}.\end{aligned}$$

Derivera och testa! Vi har nu alltså

$$y(x) = Ce^{x^2/2} - 2 - x^2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Vi söker speciellt y så att $y(0) = 0$. Då måste $y(0) = C - 2 = 0$, så $C = 2$. Kurvan som definieras med detta val av C går alltså genom origo. För $y(0) = -1$ måste $y(0) = C - 2 = -1$, så $C = 1$ och för att få $y(-1) = -1$ måste $C = 2e^{-1/2}$. Vi skissar ett riktningsfält och ritar in våra lösningar i detta. Man kallar ibland alla möjliga lösningar för ekvationens lösningsskara.



De markerade punkterna är de punkter vi valt att "förankra" lösningarna i (till exempel så gäller att $y(0) = -1$ motsvarar punkten $(0, -1)$).

3 Separabla DE

Definition. Om DE:n är av formen $g(y(x))y'(x) = h(x)$ kallas den för separabel.

En separabel DE löser vi genom att "separera variablerna." Minnesregeln är att vi slår sönder $y' = \dfrac{dy}{dx}$ och multiplicerar upp dx på andra sidan. Mer formellt utför vi följande manöver. Låt $G' = g$ och $H' = h$ (dvs hitta primitiva funktioner till g och h). Då är

$$(G(y) - H(x))' = G'(y)y' - H'(x) = g(y)y' - h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(y) - H(x) = C,$$

där C är godtycklig konstant. Vi har alltså hittat ett samband för y som inte innehåller någon derivata: $G(y(x)) = C + H(x)$. Vad som återstår är att lösa ut y ur denna ekvation, vilket kan vara ganska svårt om G är något som inte är väldigt enkelt (och inverterbart). Vi har här inte heller någon entydighet som är uppenbar (beror på G och H) utan får reda ut sådant från fall till fall Det finns krav man kan ställa på ingående funktioner för att få det men det ligger utanför ramen på denna kurs.
Minnesregel (ej klart definierat i nuläget som det står så ekvivalenser utläses approximativt):

$$g(y)\frac{dy}{dx} = h(x) \quad \text{"}\Leftrightarrow\text{"} \quad g(y)dy = h(x)dx \quad \text{"}\Leftrightarrow\text{"} \quad \int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx.$$

Exempel

Hitta en lösning till $y' = 1 + y^2$ sådan att $y(3) = 1$.

Lösning. Vi ser att

$$y' = 1 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{1+y^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(y) = x + C.$$

Eftersom $y(3) = 1$ så ser vi att

$$\arctan(1) = 3 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{\pi}{4} - 3,$$

så

$$\arctan(y) = x + \frac{\pi}{4} - 3 \quad \Rightarrow \quad y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4} - 3\right).$$

För vilka x? Det största intervall vi kan finna som innehåller $x = 3$ är

$$-\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} - 3 < \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3 - \frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + 3.$$

Svaret blir således

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4} - 3\right), \quad 3 - \frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + 3.$$

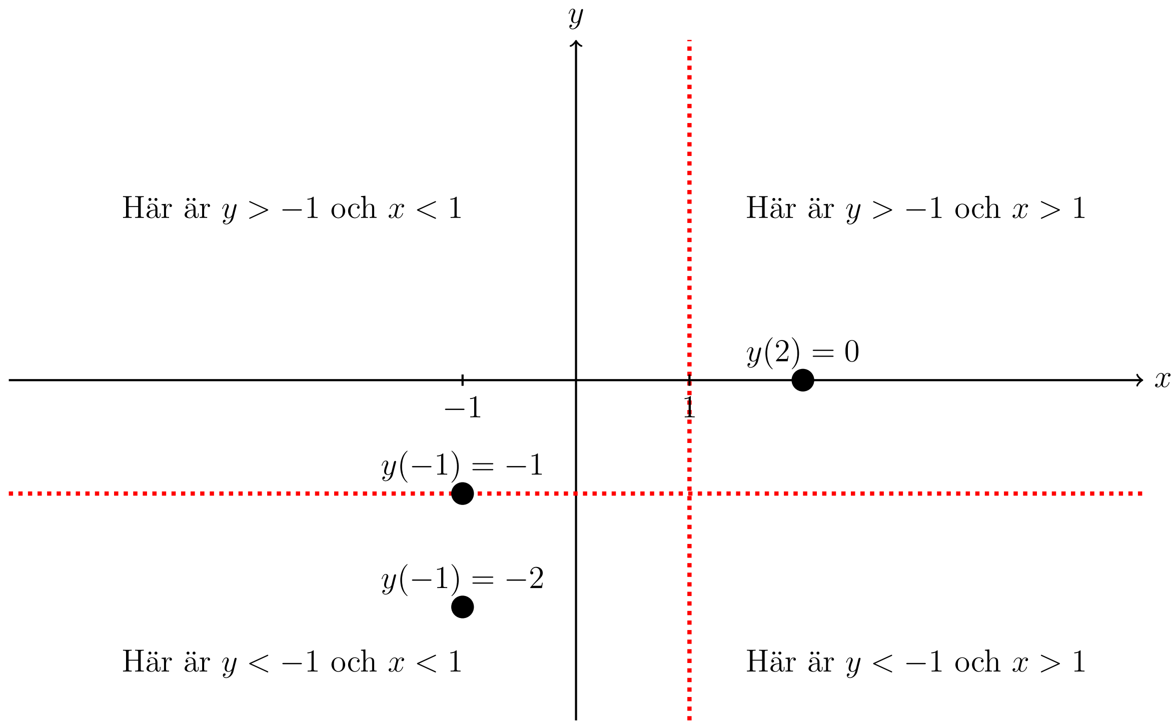
Exempel

Finn en lösning till $(x-1)^2 y' = y + 1$ så att $y(-1) = -1$, en lösning så att $y(2) = 0$, samt en lösning så att $y(-1) = -2$.

Lösning. Vi vill dela med högerledet och måste då kräva att $y+1 \neq 0$. Om det är sant och $x \neq 1$ har vi

$$\frac{y'}{y+1} = \frac{1}{(x-1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y+1}\,dy = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y+1| = C - \frac{1}{x-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad |y+1| = \exp\left(C - \frac{1}{x-1}\right) = De^{-1/(x-1)},$$

där $D = e^C$ är en godtycklig positiv konstant.
I detta skede kan det vara värt mödan att fundera lite över hur begynnelsevillkoren påverkar vad lösningen blir. Ett tips är att rita ett xy-plan och markera vilka områden lösningar befinner sig i.



För att ta bort beloppet återuppstår möjligheten att ha både positiva och negativa konstanter:

$$|y+1| = De^{-1/(x-1)} \quad \Leftrightarrow \quad y+1 = \pm De^{-1/(x-1)} \quad \Leftrightarrow \quad y = -1 + Ee^{-1/(x-1)},$$

där $E \neq 0$. Vi kan inte anta att $E = 0$ är tillåtet i nuläget. Vi har alltså lösningar

$$y(x) = -1 + Ee^{-\frac{1}{x-1}},\ x > 1 \quad \text{och} \quad y(x) = -1 + Ee^{-\frac{1}{x-1}},\ x < 1.$$

Notera särskilt definitionsmängderna! Det är ett intressant faktum här att vi inte kan definiera dessa lösningar kontinuerligt förbi $x = 1$. Endera har vi $x < 1$ eller $x > 1$. Vilket intervall vi väljer beror på vad vi har för villkor. Vad gäller fallet då $y = -1$ då? Vi testar och ser att detta löser ekvationen, så även $y(x) = -1$ är en lösning. Denna lösning är definierad även för $x = 1$. Så vi kan endera tillåta $E = 0$ ovan och i fallet då $E = 0$ blir definitionsmängden $\mathbf{R}$ (kravet på att $x \neq 1$ är ej nödvändigt).
Vi finner en lösning sådan att $y(-1) = -1$ genom att låta $y(x) = -1$ för alla x.
Om vi vill att $y(2) = 0$ så söker vi en lösning där $x > 1$, så $y(x) = -1 + E\exp(-1/(x-1))$ där

$$0 = y(2) = -1 + Ee^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad E = e.$$

Svaret är alltså

$$y(x) = -1 + \exp\left(1 - \frac{1}{x-1}\right), \quad x > 1.$$

Kravet att $x > 1$ är viktigt. Vi väljer alltså den lösning vars ”definitionsmängd” innehåller punkten vi har ett villkor i (i detta fall var det $x = 2$).
Om $y(-1) = -2$ så kommer $x < 1$ och $y < -1$, så $y(x) = -1 + E\exp(-1/(x-1))$ och

$$-2 = y(-1) = -1 + Ee^{1/2} \quad \Leftrightarrow \quad E = -e^{-1/2}.$$

Svaret är alltså

$$y(x) = -\left(1 + \exp\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x-1}\right)\right), \quad x < 1.$$

Divisioner med noll

Vid varje division som utförs måste man vara mycket noggrann med att skriva ut villkor som måste gälla. I föregående exempel kräver vi att $y \neq -1$ vilket sedan visar sig vara en möjlig lösning. Divisionen med $x - 1$ gör också att ingen av våra lösningars definitionsmängder kan innehålla $x = 1$ (förutom andra undantagsfall som $y = -1$). Var **mycket** noggran med detta!

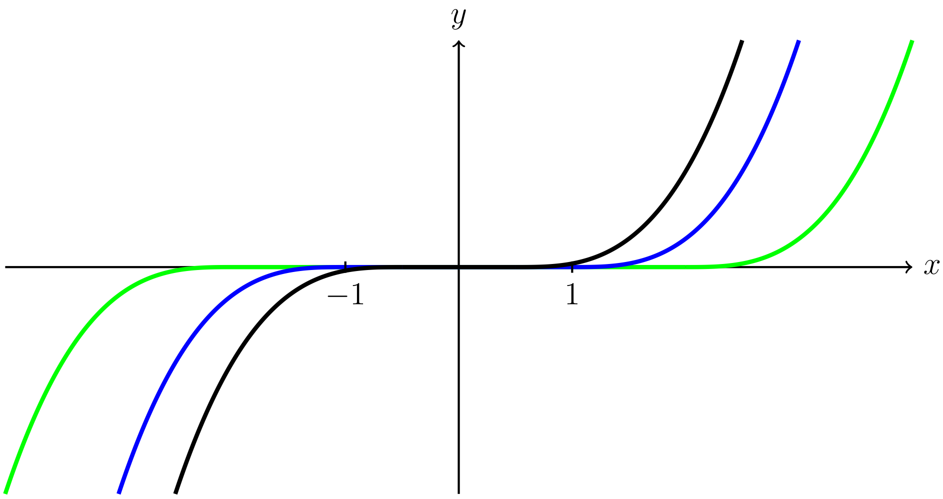
Exempel

Hitta en lösning till $y' = y^{2/3}$ för $y \in \mathbf{R}$.

Lösning. Vi vill dela med $y^{2/3}$ för att få allt y-beroende på ena sidan. Vi måste då kräva att $y \neq 0$. Om det är sant så gäller

$$y' = y^{2/3} \quad \Leftrightarrow \quad \int y^{-2/3}\,dy = \int dx = C + x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^{1/3}}{1/3} = C + x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{27}(C+x)^3.$$

Vi observerar nu att detta y löser ekvationen för alla x (testa detta). Vad händer om $y = 0$? Jo, det fungerar också eftersom $y' = 0$ då. Vi har alltså inte en entydig lösning så vi vet inte om vi funnit samtliga. Dessutom kan man göra roliga saker som att ”skarva” ihop lösningar. Vi kan till exempel välja $y(x) = \dfrac{(1+x)^3}{27}$ för $x < -1$, $y(x) = 0$ för $-1 \leq x \leq 1$ och $y(x) = \dfrac{(-1+x)^3}{27}$ för $x > 1$ som i följande figur (blå kurva). Man kan ganska enkelt visa att denna skarvning ger en funktion som är åtminstone kontinuerligt deriverar och löser differentialekvationen i fråga. Vidare kan man för olika värden på C få fler lösningskurvor som tangerar tidigare lösningar så man med bibehållen deriverbarhet kan ”hoppa” från en kurva till en annan. Fascinerande!



Detta innebär också att det kan finnas hur många olika lösningar som helst som går genom samma punkt i planet. Vi kan alltid skarva ihop lite annorlunda och få en ny lösning genom origo till exempel; där lösningskurvor tangerar varandra kan vi alltså ”hoppa” från en lösning till en annan.

4 Linjära DE av ordning 1 med komplexa koefficienter

För detta ändamål ska vi introducera komplexvärda funktioner sådana att för $x \in \mathbf{R}$ så tillåts $f(x) \in \mathbf{C}$. På detta sätt har funktionen f en real- och imaginärdel. Vi delar upp f i komponenter $f(x) = u(x) + iv(x)$ där u, v är reellvärda funktioner (vanliga funktioner alltså). Vi känner redan till ett exempel: den komplexa exponentialfunktionen $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Precis som när vi introducerade komplexa tal i grundkursen visar det sig att dessa funktioner beter sig precis som vanliga funktioner när det kommer till våra så kallade räkneregler. Även differential- och integralkalkyl fungerar analogt. Vi definierar

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x),$$
$$\int f(x)\, dx = \int u(x)\, dx + i \int v(x)\, dx$$

och så vidare. Produktregler, partiell integration, kedjeregler och allt annat fungerar precis som vanligt. Självklart behöver alla dessa fenomen egentligen bevisas ordentligt, men vi överlämnar det som övning.

Vi är speciellt intresserade av funktionen e^{wx} där $w \in \mathbf{C}$ och $x \in \mathbf{R}$. Skriv $w = \alpha + i\beta$ för $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Då är

$$e^{wx} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \left(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x) \right).$$

Den stora anledningen till vårt intresse för denna funktion är att $(e^{wx})' = we^{wx}$ precis som för den reella exponentialfunktionen (visa att detta är sant från definitionen). Detta gör att vi enkelt kan hitta integrerande faktorer även för DE med komplexvärda funktioner. Speciellt för linjära DE av ordning ett med konstanta koefficienter, dvs

$$y' + wy = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (e^{wx} y)' = e^{wx} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{-wx} + e^{-wx} \int e^{wx} g(x)\, dx.$$

Detta antyder på viss struktur hos dessa lösningar. Som nämnt tidigare pratar man om en *homogen* lösning $y_h(x) = Ce^{-wx}$ och en *partikulär* lösning $y_p(x)$ som ges av den andra termen.

Den totala lösningen ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ och lösningsgången kan reduceras till frågan om att hitta **en** partikulärlösning och sedan få alla möjliga lösningar till ekvationen genom att lägga till de homogena lösningarna. Namnet homogen kommer från att y_h löser den homogena motsvarigheten till den givna ekvationen (med $g(x) = 0$). Den här tekniken återkommer vi till på nästa föreläsning!

5 Integralekvationer

På liknande sätt som man kan betrakta DE kan man istället ha ekvationer där det ingår integraler av okända funktioner som vi försöker lösa ut. Tekniken vi använder i denna kurs bygger på att helt enkelt derivera ekvationen och lösa en ekvivalent DE i stället. I många tillämpningar däremot gör man ofta tvärt om, dvs formulerar om DE som integralekvationer då ekvationer med integraler i allmänhet beter sig bättre numeriskt än motsvarande DE.

Exempel

Finn alla kontinuerligt deriverbara funktioner y så att

$$y(x) + \int_1^x y(t)\,dt = 2e^{2x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Lösning. Vi deriverar likheten (förutsätter här att y är deriverbar) och erhåller

$$y'(x) + y(x) = 4e^{2x}.$$

Detta följer direkt från integralkalkylens huvudsats! Om y är kontinuerlig finns en primitiv funktion Y så att

$$\int_1^x y(t)\,dt = Y(x) - Y(1).$$

Om vi deriverar denna likhet fås

$$\frac{d}{dx}\int_1^x y(t)\,dy = Y'(x) - 0 = y(x).$$

Vi löser DE:n vi fick ovan genom att multiplicera med den integrerande faktorn e^x:

$$\begin{aligned} y'(x) + y(x) = 4e^{2x} \quad &\Leftrightarrow \quad e^x y'(x) + e^x y(x) = 4e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad (e^x y(x))' = 4e^{3x} \\ &\Leftrightarrow \quad e^x y(x) = \frac{4}{3}e^{3x} + C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{-x} + \frac{4}{3}e^{2x}. \end{aligned}$$

Hur bestämmer vi C? Vi måste hitta ett villkor från integralekvationen. Enklast är att sätta in $x = 1$ då integralen försvinner då. Alltså måste $y(1) + 0 = 2e^2$. Vi bestämmer nu C:

$$2e^2 = y(1) = Ce^{-1} + \frac{4}{3}e^2 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2e^3 - \frac{4}{3}e^3.$$

Det finns alltså bara en lösning:

$$y(x) = \frac{2}{3}\left(e^{3-x} + 2e^{2x}\right).$$

Entydig lösning!

Notera att det endast blir en lösning till en integralekvation av typen ovan. För att behålla ekvivalens när vi deriverar ekvationen måste vi ställa krav på lösningen. Det är ett principfel att svara med samtliga lösningar till den differentialekvation!