Föreläsning 6: Linjära differentialekvationer av högre ordning

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

24 mars 2022

1 Partikulärlösningar

Vi kommer nu att betrakta linjära ekvationer av högre ordning. Det innebär att ekvationen kommer att ha formen

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x), \quad x \in]a,b[,$$

där $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ och g är funktioner som är tillräckligt snälla för att ekvationen ska ha mening och $]a,b[$ är något öppet intervall (möjligen oändligt). En lösning y till ekvationen är en funktion $y \in C^n$ (så y är n gånger kontinuerligt deriverbar) som uppfyller sambandet ovan för varje $x \in]a,b[$. Det kommer i allmänhet att existera många sådana lösningar, så vi kommer att lägga en hel del energi på att se till att vi finner *samtliga* lösningar till ekvationen.
Låt oss börja med att betrakta ett exempel.

Exempel

Visa att $y = e^{x^2}$ löser ekvationen

$$y'' - 2xy' + 2y = 4\,e^{x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Lösning. Eftersom vi fått ett förslag på lösning så testar vi helt enkelt om funktionen $y(x) = e^{x^2}$ löser ekvationen genom direkt insättning:

$$y = e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = 2xe^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2},$$

så

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 2x \cdot 2xe^{x^2} + 2e^{x^2} = 4e^{x^2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

En lösning till en differentialekvation brukar kallas för en **partikulärlösning**. Detta innebär alltså inget speciellt mer än att det är *någon* funktion $y = y_p$ som uppfyller ekvationen. Så om en ekvation är given, hur hittar vi dessa lösningar? I princip handlar det om att gissa på något vettigt och visa att det fungerar. Det kan låta lite skumt i nuläget, men det kommer att blir tydligare hur det fungerar senare.

2 Differentialoperatorer

För att underlätta notation och visa på underliggande struktur introducerar vi begreppet *differentialoperator* (DO). Den enklaste icke-triviala varianten på en DO är helt enkelt operationen att derivera med avsende på variabeln x. Vi brukar skriva det $(\,\cdot\,)'$, $\dfrac{d}{dx}$, eller det som kommer att vara vanligast i detta avsnitt, D. Med andra ord gäller alltså

$$\frac{dy}{dx} = Dy(x) = y'(x)$$

för alla deriverbara funktioner y. Vi tillåter oss att vara lite slarviga med notationen. Självklart så kan man även betrakta operationen att derivera två gånger. Denna operation kan enkelt skrivas D^2. Då är $D^2y = y''$ vilket kan ses genom manövern

$$D^2y = D(Dy) = Dy' = y''.$$

På samma sätt är $D^3y = y^{(3)}$ och så vidare. Vi är nu mogna för följande definition.

Differentialoperator

Definition. Om $p(r)$ är ett polynom

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

definierar vi *differentialoperatorn* $p(D)$ genom

$$p(D)y = a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y$$

för alla y som kan kontinuerligt deriveras n gånger. Polynomet $p(r)$ kallas differentialoperatorns *karakteristiska polynom.*

Ett par exempel är på sin plats.

Exempel

(i) Om $p(D) = D + 1$ är $p(D)y = y' + y$;

(ii) Om $p(D) = D^2 - 2$ är $p(D)y = y'' - 2y$;

(iii) Om $p(D) = (D+1)^2 = D^2 + 2D + 1$ är $p(D)y = y'' + 2y' + y$.

Det sista exemplet kommer vi att återvända till. Man kan alltså precis som för vanliga polynom faktorisera $p(D)$ bara man är försiktig i vilken ordningen man skriver D:n och konstanter. Detta kommer att vara nyckeln till att lösa högre ordningens DE.

Exempel

Skriv ekvationen $2y^{(3)} - 3y' + 2y = 7x$ med hjälp av en DO.

Lösning. Vi ser direkt att ekvationen ekvivalent kan formuleras som $2D^3y-3Dy+2y=7x$, och om vi låter $p(D)=2D^3-3D+2$ kan vi skriva $p(D)y=7x$. De termer som inte innehåller y kan inte ingå i operatorn.

Linjäritet

Sats. Operatorn $p(D)$ definierad ovan är *linjär*, dvs om y_1 och y_2 är n gånger deriverbara funktioner och $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ är konstanter så är

$$p(D)\big(c_1y_1+c_2y_2\big)=c_1p(D)y_1+c_2p(D)y_2.$$

Beviset är enkelt eftersom vi vet att vi kan derivera en summa genom att ta summan av respektive derivatorer samt att vi kan bryta ut konstanter (med andra ord, att operatorn D är linjär). Faktum är att satsen gäller även om vi inte har konstanta koefficienter.

Konstanta koefficienter

Definition. Vi säger att den DO $p(D)$ vi introducerade ovan har konstanta koefficienter eftersom konstanterna $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är just konstanter.

Definitionen kanske verkar lite konstig, men man arbetar ofta med DO:er där man låter koefficienterna $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $p(D)$ bero på x (alltså vara funktioner av x). Vi kommer oftast att enbart betrakta fallet med konstanta koefficienter när vi arbetar med högre ordningens DE:er (med bland annat Euler-ekvationer som undantag).

3 Generell lösningsstruktur

Linjäriteten hos ekvationen ger upphov till en generell lösningsstruktur. Observera först att om y_1 och y_2 är lösningar till ekvationen $p(D)y=g$, så kommer $z=y_1-y_2$ att lösa ekvationen $p(D)z=0$:

$$p(D)z=p(D)(y-y_p)=p(D)y-p(D)y_p=g-g=0.$$

Detta gäller oavsett om koefficienterna i $p(D)$ är konstanta eller ej (endast linjäriteten är nödvändig). Lite omvänt innebär detta att följande sats gäller.

Sats. Samtliga lösningar till $p(D)y=g$ kan delas upp i två delar: $y=y_h+y_p$, där den **homogena lösningen** y_h löser ekvationen $p(D)y_h=0$ och **partikulärlösningen** y_p är *någon* lösning till $p(D)y_p=g$.

Bevis. Genom att betrakta $z=y-y_p$ där y och y_p är olika lösningar till ekvationen följer påståendet av linjäriteten enligt ovan. □

Vi har alltså visat att $z=y-y_p$ löser den homogena ekvationen $p(D)z=0$. Så om vi har *en* partikulärlösning y_p så att $p(D)y_p=g$, så ges *samtliga* lösningar av denna partikulärlösning plus lösningar y_h till den homogena ekvationen $p(D)y_h=0$. Detta kommer vara nyckeln till att lösa linjära ekvationer av högre ordning.

Begreppet ”homogen lösning” är egentligen lite slarvigt då det är ekvationen som vi har en lösning till som är homogen, inte lösningen som sådan. Men vi kommer tillåta språkbruket.

4 Lösningar till homogena ekvationer

Det blir således relevant att studera den homogena ekvationen med hög noggrannhet. Vi kommer nu att betrakta linjära differentialekvationer av ordning n:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g(x)$$

där vi som vanligt kan skriva

$$p(D)y(x) = g(x), \quad \text{med } p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0.$$

Det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0$$

kan *alltid* faktoriseras enligt

$$p(r) = (r - r_1)^{m_1}(r - r_2)^{m_2} \cdots (r - r_k)^{m_k}$$

där $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ och $r_i \neq r_j$ då $i \neq j$ samt $r_i \in \mathbf{C}$. Detta innebär alltså att roten r_i har multiplicitet m_i.

Lösningar till homogena ekvationer

Sats. Samtliga lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ ges av

$$y_h = q_1(x)e^{r_1x} + q_2(x)e^{r_2x} + \cdots + q_k(x)e^{r_kx},$$

där $q_i(x)$ är godtyckliga polynom så att grad $q_i \leq m_i - 1$.

Detta innebär att om r_i är en enkelrot ($m_i = 1$) så är $q_i(x) = A$ en konstant. För en dubbelrot ges $q_i(x) = Ax + B$, för en trippelrot har vi $q_i(x) = Ax^2 + Bx + C$ och så vidare. Observera att r_i så klart kan vara komplexa tal, och i så fall är $r_{i,j} = \alpha \pm i\beta$ (om vi har reella koefficienter) där r_j är den konjugerade roten och

$$C_1e^{r_ix} + C_2e^{r_jx} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

för godtyckliga konstanter A och B.

I specialfallet $n = 2$ kan $p(r)$ faktoriseras som $p(r) = (r - r_1)(r - r_2)$. Enligt satsen ovan så kommer då lösningarna till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$\begin{aligned} y_h &= C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \quad \text{om } r_1 \neq r_2 \text{ och} \\ y_h &= (C_1 + C_2x)e^{r_1x} \quad \text{om } r_1 = r_2. \end{aligned}$$

Vi visar detta specialfall. Tekniken visar hur man enkelt kan generalisera det hela till $n > 2$ genom att fortsätta upprepa användandet av integrerande faktorer på enkel form. Vi ser att

$$p(D)y_h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D - r_1)(D - r_2)y_h = 0.$$

Låt $z = (D - r_2)y_h$. Då är alltså (enligt fallet av ordning ett)

$$(D - r_1)z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = Ae^{r_1x}.$$

Då blir

$$(D - r_2)y_h = Ae^{r_1 x} \quad \Leftrightarrow \quad y_h = Be^{r_2 x} + e^{r_2 x} \int e^{-r_2 x} Ae^{r_1 x}\, dx.$$

Om $r_1 \neq r_2$ följer det alltså att

$$y_h = Be^{r_2 x} + \frac{A}{r_1 - r_2} e^{r_1 x} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

och om $r_1 = r_2$ är

$$y_h = Be^{r_2 x} + Axe^{r_1 x} = (Ax + B)e^{r_1 x}.$$

Exempel

Hitta alla lösningar till $2y'' + 3y' - 2y = 0$

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = 2r^2 + 3r - 2$ och faktoriserar detta:

$$p(r) = 2\left(r - \frac{1}{2}\right)(r + 2).$$

Rötterna är alltså $r = 1/2$ och $r = -2$ vilket ger lösningarna

$$y(x) = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-2x}.$$

Exempel

Hitta alla lösningar till $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$.

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 - 3r^2 + 9r + 13$ och undersöker när $p(r) = 0$:

$$p(r) = (r + 1)(r^2 - 4r + 13) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -1,\ r = 2 \pm 3i.$$

Här fick vi alltså gissa en rot $(r = -1)$ och polynomdividera lite. Det finns alltså komplexa rötter, men det gör inget. De homogena lösningarna ges av

$$\begin{aligned}
y_h(x) &= C_1 e^{-x} + Ae^{(2+3i)x} + Be^{(2-3i)x} \\
&= C_1 e^{-x} + e^{2x}\left(Ae^{3ix} + Be^{-3ix}\right) \\
&= C_1 e^{-x} + e^{2x}\left(A\cos 3x + iA\sin 3x + B\cos 3x - iB\sin 3x\right) \\
&= C_1 e^{-x} + e^{2x}\left(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x\right)
\end{aligned}$$

där $C_2 = A + B$ och $C_3 = iA - iB$. Men eftersom A och B redan är godtyckliga konstanter kan vi lika gärna se C_2 och C_3 som godtyckliga konstanter. Svaret blir alltså att

$$y(x) = C_1 e^{-x} + e^{2x}\left(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x\right).$$

Notera att det inte är nödvändigt att göra om Euler-kalkylen varje gång; du får direkt skriva upp lösningen på så kallad reell form om du vill.

Exempel

Hitta alla lösningar till $y^{(6)} - 3y^{(5)} + 4y^{(3)} = 0$

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^6 - 3r^5 + 4r^3 = (r-2)^2(r+1)r^3$, så de homogena lösningarna ges av

$$y_h = (C_0 + C_1 x)e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 + C_4 x + C_5 x^2.$$

5 Lösningar till icke-homogena ekvationer

Lösningsgången är i princip likadan när vi löser alla linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Vi försöker summera denna.

Lösningsschema

Givet en ekvation $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g$ med konstanta koefficienter gör vi normalt sett följande:

- Identifiera $p(D)$ och skriv ned det karakteristiska polynomet $p(r)$.
- Faktorisera $p(r)$ (möjligen komplext) och notera rötterna $r_1, r_2, \ldots, r_k$ där $1 \leq k \leq n$ samt deras multiplicitet m_i.
- Skriv ned **alla** homogena lösningar

  $$y_h = q_1(x)e^{r_1 x} + q_2(x)e^{r_2 x} + \cdots + q_k(x)e^{r_k x},$$

  där polynomet $q_i(x)$ har grad $m_i - 1$. Om någon rot r_j är komplex kan vi välja att skriva y_h på reell form med cos- och sin-termer i stället:

  $$e^{\alpha x}\left(a(x)\cos\beta x + b(x)\sin\beta x\right),$$

  där $r_j = \alpha \pm \beta i$ och $a(x)$ samt $b(x)$ är polynom med grad $m_j - 1$.
- Hitta **någon** partikulärlösning y_p till ekvationen.
- Formulera den allmänna lösningen $y = y_h + y_p$. Här finns obestämda konstanter.
- Kontrollera att antalet obestämda konstanter är detsamma som graden på $p(r)$. Detta *måste* stämma.
- Eventuellt bestäm konstanterna i de okända polynomet $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_k(x)$ om det finns villkor.

Det största problemet här brukar vara att hitta partikulärlösningen och vi kommer ägna en hel del tid åt detta problem. Det brukar kännas lite ad-hoc (vilket det kanske även är) och man behöver bygga upp lite känsla för vad som är lämpliga ansatser.

Villkor på lösningar

Observera att **hela** lösningen $y = y_h + y_p$ måste bestämmas innan några villkor sätts in för att finna konstanterna. Detta kan **inte** göras direkt på homogenlösningen.

6 Allmänna lösningar

För att hitta den **allmänna lösningen**, dvs den lösning som täcker alla möjliga lösningar till ekvationen, så behöver vi första hitta en partikulärlösning. När vi letar en partikulärlösning så brukar vi ofta utgå från någon slags ansats som verkar rimlig och sedan bestämma vilka värden parametrar i ansatsen måste ha. Om det går att välja parametrarna så är vi färdiga, annars måste ansatsen modifieras. Så hur vet man vad för slags ansats man ska göra? Vi kommer att fortsätta med detta på nästa föreläsning, men låt oss betrakta ett par exempel redan nu.

Exempel

Visa att $y = e^{x^2}$ löser ekvationen

$$y'' - 2y' + 5y = (4x^2 - 4x + 7)e^{x^2}$$

och hitta sedan en lösning så att $y(0) = y'(0) = 0$.

Lösning. Vi har redan fått ett förslag på partikulärlösning: $y_p = e^{x^2}$. Direkt derivering och insättning visar att

$$y_p'' - 2y_p' + 5y_p = (4x^2 - 4x + 7)e^{x^2}.$$

Ekvationen har det karakteristiska polynomet $p(r) = r^2 - 2r + 5$, så

$$p(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1 \pm 2i.$$

Således erhåller vi de homogena lösningarna

$$y_h = e^x \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

Samtliga lösningar till ekvationen ges alltså av

$$y(x) = e^x \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + e^{x^2}.$$

Vidare gäller

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + e^0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = -1$$

och då $y'(x) = e^x \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x\right) + 2xe^{x^2}$,

$$y'(0) = 0 \Rightarrow \quad C_1 + 2C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Den eftersöka lösningen (den enda) ges av

$$y(x) = e^x \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \cos 2x\right) + e^{x^2}.$$

Så när vi fick ett förslag på partikulärlösning gick det ganska enkelt. Men vad gör vi om vi inte känner till någon partikulärlösning?

Exempel

Hitta alla lösningar till $y''' - y'' + y' - y = x + 1$.

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 - r^2 + r - 1$ och faktoriserar detta:

$$p(r) = (r-1)(r^2+1) = (r-1)(r+i)(r-i).$$

De homogena lösningarna ges alltså av

$$y_h(x) = C_1 e^x + Ae^{ix} + Be^{-ix} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Vi söker en partikulärlösning y_p och ansätter $y_p = Cx + D$ eftersom högerledet är ett polynom av grad ett. Notera att vi här *inte* direkt använder superposition, utan ansätter allt på en gång. Det går alldeles utmärkt så länge det går att hantera ansatsen. Vi har

$$p(D)y_p = C - (Cx + D) = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad C - D = 1 \text{ och } -C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = -1 \text{ och } D = -2.$$

Svaret är alltså

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x - 2.$$