Föreläsning 8: Differentialekvationer – en återblick

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

24 mars 2022

1 Differentialekvationer

Kom ihåg att en differentialekvation är en ekvation som innehåller en okänd funktion $y(x)$ och derivatorer av varierande ordning ($y'(x), y''(x)$ etc) samt andra funktioner av variabeln x:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, x) = 0.$$

Med en lösning till en sådan ekvation så menar vi funktionen $y(x)$ samt ett öppet intervall $]a, b[$ (möjligen oändligt) så att

$$F(y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x), x) = 0, \quad \text{for alla } x \in]a, b[.$$

2 Linjär ordning 1

En ekvation på formen

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$$

kallar vi för linjär. En sådan ekvation har vi löst genom att använda en integrerande faktor så att vänsterledet kan skrivas som derivatan av en produkt.

Exempel

Bestäm $g(x)$ så att x^3 är en lösning till

$$y'(x) + g(x)y(x) = x^2, \quad x > 0,$$

och finn sedan den lösning så att $y(1) = 0$.

Lösning. Om $y(x) = x^3$ ska vara en lösning måste

$$(x^3)' + g(x)x^3 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x)x^3 = -2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = -\frac{2}{x},$$

där vi utnyttjat att $x > 0$ vid divisionen. Vi ska alltså lösa

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2, \; x > 0.$$

En integrerande faktor ges av $e^{-2\ln x} = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$. Vi multiplicerar ekvationen med denna och finner att, för $x > 0$,

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{x^2}\right) = x^2\frac{1}{x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x^2} = x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = x^3 + Cx^2,$$

där C är en godtycklig konstant. Vi söker speciellt den lösning som uppfyller

$$0 = y(1) = 1 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -1.$$

Svar: $y(x) = x^3 - x^2$, $x > 0$.

3 Ickelinjär ordning 1

Om ekvationen är av ordning 1 men inte linjär är problemet betydligt svårare. Men vissa typer av ekvationer kan vi fortfarande hantera hyfsat generellt. En ekvation kallas separabel om den kan skrivas på formen

$$g(y)y' = h(x).$$

Vi löser dessa genom att integrera båda sidor med syfte på x och göra ett variabelbyte i vänsterledet, så att

$$g(y)y' = h(x). \quad \Leftrightarrow \quad \int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad G(y) = H(x) + C,$$

där $G' = g$ och $H' = h$. Vi behöver sedan lösa denna ekvation genom att invertera funktionen G.

(i) Tänk på att när ekvationen $F(y, y', x) = 0$ skrivs om på formen ovan så kan det hända att vi tappar ekvivalens av olika skäl (oftast noll-divisioner). När det sker så kan det dyka upp andra typer av lösning. Var försiktig!

(ii) När vi löser $G(y) = H(x) + C$ för att finna lösningen y så kan det dyka upp båda olika uttryck för lösningen y (tänk till exempel $y^2 = \ldots$) och krav på x för att det ska gå att invertera $G(y)$.

Exempel

Lös ekvationen $xyy' = 1$ då (a) $y(-1) = \sqrt{2}$ (b) $y(2) = -1$.

Lösning. Ekvationen är separabel ty

$$xyy' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad yy' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Divisionen med x medför att vi endast kan ha lösningar för endera $x < 0$ eller för $x > 0$. Inget intervall där en lösning är definierad kommer innehålla $x = 0$. Vi integrerar ekvationen och finner att

$$yy' = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = C + \ln|x| \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 2C + \ln x^2.$$

Detta är nog det enklaste stället att bestämma konstanten, så om $y(-1) = \sqrt{2}$ så kommer

$$2 = 2C + \ln(-1)^2 = 2C + \ln 1 = 2C \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

Vidare så måste

$$2C + \ln x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x^2 \geq -2C \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq e^{-2C} \quad \Leftrightarrow \quad |x| \geq e^{-C}$$

ty ln är strängt växande. Nu gäller att

$$y^2 = 2C + \ln x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2C + \ln x^2}.$$

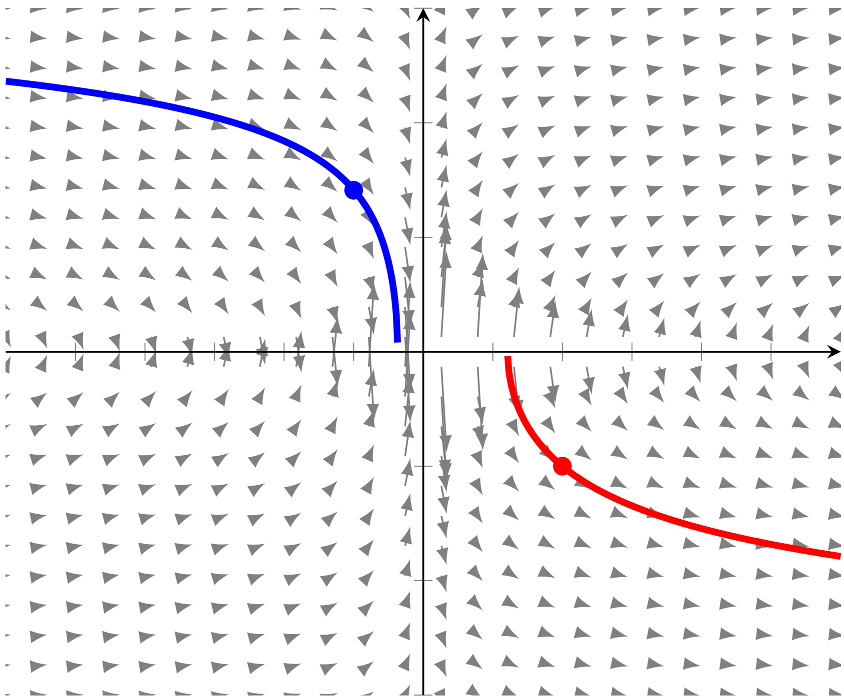
Eftersom $y(-1) = \sqrt{2} > 0$ så måste $y = \sqrt{2 + \ln x^2}$ och vi måste välja $]-\infty, -e^{-1}[$ som definitionsmängd. Varför strikt gräns vid $x = e^{-1}$? Fundera över hur differentialekvationen annars skulle tolkas med tanke på definitionen på derivata (gränsvärdet). Vi söker dessutom (i denna kurs) alltid en lösning på ett *öppet* intervall.

Om $y(2) = -1$ så behöver vi välja $x > 0$ till att börja med. Konstanten bestämmer vi genom

$$(-1)^2 = 2C + \ln 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Eftersom $y(2) < 0$ så ges lösningen av

$$y = -\sqrt{1 - 2\ln 2 + \ln x^2} = -\sqrt{1 + \ln\left(\frac{x^2}{4}\right)}, \quad x > e^{-1/2+\ln 2} = 2e^{-1/2}.$$



4 Linjär högre ordning

Linjära ekvationer av högre ordning har formen

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x), \quad x \in]a,b[,$$

där $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ och g är lagom snälla funktioner. Vi kan uttrycka vänsterledet i termer av en differentialoperator

$$p(D) = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x).$$

Sats. Samtliga lösningar till $p(D)y = g$ kan delas upp i två delar: $y = y_h + y_p$, där den **homogena lösningen** y_h löser ekvationen $p(D)y_h = 0$ och **partikulärlösningen** y_p är *någon* lösning till $p(D)y_p = g$.

Det generella fallet är svårt. Låt oss betrakta fallet när koefficienterna är konstanta.

4.1 Konstanta koefficienter

Med konstanta koefficienter blir $p(D)$ ett polynom i D. Polynomet $p(r)$ kallas differentialoperatorns *karakteristiska polynom*:

$$p(r) = a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0 = a_n(r-r_1)^{m_1}(r-r_2)^{m_2}\cdots(r-r_k)^{m_k},$$

där $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ och $r_i \neq r_j$ då $i \neq j$ samt $r_i \in \mathbf{C}$. Detta innebär alltså att roten r_i har multiplicitet m_i.

Lösningar till homogena ekvationer

Sats. Samtliga lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ ges av

$$y_h = q_1(x)e^{r_1x} + q_2(x)e^{r_2x} + \cdots + q_k(x)e^{r_kx},$$

där $q_i(x)$ är godtyckliga polynom så att grad $q_i \leq m_i - 1$.

Notera följande specialfall.

(i) r_i enkelrot ($m_i = 1$) $\Rightarrow$ $q_i(x) = A$ en konstant.

(ii) r_i dubbelrot ($m_i = 2$) $\Rightarrow$ $q_i(x) = Ax + B$ polynom av grad 1.

(iii) r_i trippelrot ($m_i = 3$) $\Rightarrow$ $q_i(x) = Ax^2 + Bx + C$ polynom av grad 2.

(iv) Om $r_{i,j} = \alpha \pm i\beta$ (om vi har reella koefficienter) där $r_j = \overline{r_i}$ är den konjugerade roten så är

$$C_1e^{r_ix} + C_2e^{r_jx} = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$$

för godtyckliga konstanter A och B. Är det komplexa multipelrötter ersätts A och B av polynom av högre grad.

Exempel

Hitta alla lösningar till $y''' + 4y'' + 4y' = 12\,e^{-2x}$ så att $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 2$.

Lösning. Det karakteristiska polynomet ges av

$$p(r) = r^3 + 4r^2 + 4r = r(r^2 + 4r + 4) = r(r + 2)^2.$$

Rötterna är alltså $r = 0$ och $r = -2$. Enligt sats ges nu samtliga lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h(x) = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{-2x}.$$

Vi söker nu en partikulärlösning $y_p(x)$. Lämplig ansats är till exempel $y_p(x) = z(x)e^{-2x}$. Förskjutningsregeln visar nu att

$$\begin{aligned} p(D)y_p = p(D)(ze^{-2x}) &= e^{-2x}p(D-2)z = e^{-2x}(D-2)(D-2+2)^2z \\ &= e^{-2x}(D-2)z'' = e^{-2x}(z''' - 2z''). \end{aligned}$$

Detta uttryck insatt i ekvationen medför att

$$p(D)y_p = 12e^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad z''' - 2z'' = 12.$$

En lösning $z(x)$ till denna ekvation finner vi genom ansatsen $z(x) = Ax^2$, ty

$$0 - 4A = 12 \quad \Leftrightarrow \quad A = -3,$$

så $z = -3x^2$ och $y_p = -3x^2e^{-2x}$. Den allmänna lösning till ekvationen ges därmed enligt superpositionsprincipen av

$$y(x) = C_1 + (C_2 + C_3x - 3x^2)e^{-2x}.$$

Alltså blir

$$y'(x) = e^{-2x}\big(-2C_2 - 2C_3x + 6x^2 + C_3 - 6x\big)$$

och därmed finner vi att

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1 \quad \text{och} \quad y'(0) = -2C_2 + C_3 = 0.$$

Vidare är $\lim_{x\to\infty} y(x) = C_1 = 2$, så $C_2 = 1 - C_1 = -1$ och $C_3 = 2C_2 = -2$. De eftersöka lösningarna ges därmed av

$$y(x) = 2 - \big(1 + 2x + 3x^2\big)e^{-2x}.$$

Svar: $y(x) = 2 - \big(1 + 2x + 3x^2\big)e^{-2x}$.

Låt oss återvända till ett exempel från förra föreläsningen.

Exempel

Finn alla lösningar till $y'' + y' - 6y = 2\sin 2x$.

Lösning. Låt $p(r) = r^2 + r - 6$. De homogena lösningarna ges av

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

eftersom $p(r) = 0$ har lösningarna $r = 2$ och $r = -3$ och faktoriseringen $p(r) = (r-2)(r+3)$. Eftersom $\sin 2x = \operatorname{Im} e^{2ix}$ betraktar vi ekvationen $p(D)u = 2e^{2ix}$. Vi byter namn på funktionen till u för att inte blanda ihop det med y som är den reella lösningen vi söker i slutändan. För partikulärlösningen använder vi förskjutningssatsen och ansatsen $u_p(x) = z(x)e^{2ix}$:

$$\begin{aligned} p(D)\left(z(x)e^{2ix}\right) = 2e^{2ix} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{2ix} p(D+2i)z(x) = 2e^{2ix} \\ &\Leftrightarrow \quad p(D+2i)z(x) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad (D-2+2i)(D+3+2i)z = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad (D^2 + (1+4i)D - 10 + 2i)z = 2. \end{aligned}$$

Detta ser riktigt bökigt ut men vi söker bara **en** partikulärlösning, så vi ansätter $z_p = A$. Då är $(-10+2i)A = 2$, eller $A = -\dfrac{5}{26} - \dfrac{1}{26}i$. Alltså,

$$\begin{aligned} u_p(x) = z_p(x)e^{2ix} &= \left(-\frac{5}{26} - \frac{1}{26}i\right)(\cos 2x + i \sin 2x) \\ &= \frac{-5\cos 2x + \sin 2x}{26} - i\frac{5\sin 2x + \cos 2x}{26}. \end{aligned}$$

Vi finner nu vår sökta partikulärlösning genom att ta $y_p = \operatorname{Im} u_p(x)$, vilket stämmer överens med vad vi tog fram ovan med den reella metoden. Observera att vi här på köpet även får en partikulärlösning för högerledet $\cos 2x$ (hur?). Detta alternativ bygger på att ekvationen är linjär så superpositionsprincipen fungerar och vi kan dela upp i real- och imaginärdel.

Det är absolut inget krav att använda förskjutningsregeln i exemplet ovan. Det går lika bra att direkt derivera ansatsen och sätta in i ekvationen. Testa detta!

4.2 Variabla koefficienter

Det generella fallet med variabla koefficienter,

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x),$$

innebär att faktorerna före varje derivata tillåts bero på x. Mycket svårt att lösa i det generella fallet. Egenskaper som endast har med linjäritet att göra gäller fortfarande (superposition och så vidare). Däremot är det svår att karakterisera samtliga homogena lösningar samt det kan även vara svårt att hitta någon partikulärlösning.

Generellt sett finns det *ingen* karakteristisk ekvation för fallet med variabla koefficienter.

Vi har ett specialfall där vi genom en enkel substitution kan transformera ekvationen till en ekvation med konstanta koefficienter.

Euler-ekvationer

Ekvationer på formen

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = g(x),$$

kallas för Euler-ekvationer. Dessa karakteriseras av att varje derivata av ordning k har koefficienten $a_k x^k$. Denna speciella ekvation kan vi lösa genom att byta variabel till $t = \ln x$. Exempelvis blir då, med $z(t) = y(e^t)$,

$$y'(e^t) = e^{-t}z'(t), \quad y''(e^t) = e^{-2t}(z''(t) - z'(t)), \quad y'''(e^t) = e^{-3t}\big(z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t)\big),$$

och så vidare till följd av kedjeregeln. Insättning i differentialekvationen ger nu en ekvation för z med konstanta koefficienter.

5 Integralekvationer

Vi löser i allmänhet integralekvationer genom att derivera dessa till den punkten att vi har en ren differentialekvation istället. Innan varje derivering bestämmer vi ett villkor på y för att bestämma integrationskonstanter senare.

En integralekvation har *en* lösning. Eventuella konstanter *måste* bestämmas.

Exempel

Lös $\displaystyle\int_0^x \int_u^1 y(t)\,dt\,du - \frac{1}{4}y(x) = x - \frac{x^2}{2}$.

Lösning. Vi ser att $x = 0$ ger $y(0) = 0$. Derivering ger att

$$\int_x^1 y(t)\,dt - \frac{1}{4}y'(x) = 1 - x.$$

Här ser vi att $y'(1) = 0$ och ytterligare en derivering visar att

$$-y(x) - \frac{1}{4}y''(x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y''(x) + 4y(x) = 4.$$

Linjär ekvation av ordning två med karakteristiskt polynom $p(r) = r^2 + 4 = (r + 2i)(r - 2i)$. De homogena lösningarna (på reell form) ges av

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Vi finner en partikulärlösning genom ansatsen $y_p = A$ som ger att $A = 1$. Den allmänna lösningen (till differentialekvationen) ges alltså av

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 1.$$

Nu måste *måste* **måste** vi bestämma konstanterna. Vi ser att

$$y(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = -1$$

och då $y'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$ så

$$y'(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2C_1 \sin 2 + 2C_2 \cos 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -\frac{\sin 2}{\cos 2} = -\tan 2.$$

Svar: $y(x) = 1 - \cos 2x - \tan 2 \cdot \sin 2x$.