Föreläsning 10: Serier (”generaliserade summor”)

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

24 mars 2022

En funktion $s\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ brukar kallas talföljd, och vi skriver ofta s_n i stället för $s(n)$. Detta innebär alltså att för varje heltal $n \geq 0$ så är s_n något reellt tal. Andra beteckningar finns, till exempel används ofta $s[n]$ för att markera att det handlar om den *diskret* funktion (dvs en talföljd). Det är inget speciellt med $\mathbf{N}$ mer än att vi måste börja någonstans och fortsätta till oändligheten. Vi kan lika gärna tänka oss en talföljd s_n där $n = -4, -3, -2, \ldots$. Eller s_n där $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$ och så vidare.

Exempel

(i) $s_n = 3^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs $s_0 = 1$, $s_1 = 3$, $s_2 = 3^2$ och så vidare.

(ii) $s_n = \dfrac{1}{2^n}$, $n = 4, 5, 6, \ldots$, dvs $s_0 = 1/16$, $s_1 = 1/32$, $s_2 = 1/64$ och så vidare.

Speciellt är vi intresserade av summor av talföljder. Om a_k är en talföljd kan vi låta

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

något vi stött på vid många tillfällen tidigare. Exempelvis som geometriska summor. Vi skapar alltså en ny talföljd s_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, från talföljden a_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Exempel

Exempelvis $a_k = 3^{-k}$ ger

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} 3^{-k} = \frac{3^{-(n+1)} - 1}{3^{-1} - 1} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

1 Numeriska serier

Det som är nytt nu är att vi tänker låta $n \to \infty$. Frågan uppstår då hur vi ska tolka ”summan” med oändligt många termer. Låt oss kalla gränsvärdet s så att $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ i de fall då detta gränsvärde existerar, vilket förefaller vara en naturlig definition (jämför med de generaliserade integralerna). I exemplet ovan ser vi att

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{3}{2}.$$

Definition. Om a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ är en talföljd definierar vi *serien* s enligt

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

i de fall då detta gränsvärde existerar. Vi kallar $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ för *delsummor* av $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Det kan gå åt skogen på två olika sätt i definition:

(i) Om gränsvärdet blir någon oändlighet, dvs $s_n \to \infty$ eller $s_n \to -\infty$ då $n \to \infty$.

(ii) Om gränsvärdet inte ens existerar som någon oändlighet, till exempel $s_n = (-1)^n$.

I det första fallet skriver vi ibland $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ respektive $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$, även om dessa inte är reella tal. Men det ger en smidigare notation (precis som för generaliserade integraler).

Definition. Om en serie existerar som ett **ändligt** reellt tal kallar vi serien för *konvergent*. Annars säger vi att serien är *divergent*.

Vi skriver ibland (formellt) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ även då serien inte existerar. Speciellt i formen av frågan "Är serien konvergent?"

Exempel

Avgör om $\sum_{k=0}^{\infty}(1+2k)$ och $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ är konvergenta.

Lösning. Den första serien är divergent eftersom delsummorna är aritmetiska så

$$\sum_{k=0}^{n}(1+2k) = \frac{(1+2n+1)(n+1)}{2} = (n+1)^2 \to \infty, \quad \text{då } n \to \infty.$$

Den andra serien är konvergent eftersom delsummorna är geometriska med $|q| < 1$, ty

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} = 2\left(1-2^{-(n+1)}\right) \to 2, \quad \text{då } n \to \infty.$$

Vi har här alltså direkt avgjort konvergensfrågan genom att helt enkelt (försöka) räkna ut serierna.

Divergenstestet

Sats. Om $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Observera att detta villkor för divergens inkluderar fallet när gränsvärdet $\lim_{k\to\infty} a_k$ inte existerar.
Bevis. Låt oss skriva a_k lite kreativt enligt

$$a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) = s_k - s_{k-1}.$$

Om summan är konvergent så gäller att både $s_k \to s$ och $s_{k-1} \to s$ då $k \to \infty$. Men detta innebär enligt likheten ovan att $a_k = s_k - s_{k-1} \to s - s = 0$ då $k \to \infty$. Med andra ord, om serien är konvergent så **måste** $a_k \to 0$ då $k \to \infty$. Negationen av detta är påståendet i satsen ovan.

Observera att omvändningen **inte** gäller. Det räcker alltså **inte** att $a_k \to 0$ för att en serie ska konvergera. Det klassiska motexemplet är den s.k. *harmoniska* serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ som divergerar.

Varför divergerar den harmoniska serien? Man kan se det genom följande illustration (vilket också visar att mycket kan gömmas i oändligheten). Vi har

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \frac{1}{17} + \cdots,$$

vilket innebär att den harmoniska serien är större än summan av oändligt många $1/2$. Således kan den inte konvergera.

Geometriska serier

Den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergerar om och endast om $|q| < 1$ och konvergerar då till $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Detta följer från formeln för geometriska summor:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$$

såvida $|q| < 1$. Om $|q| \geq 1$ ser vi att $a_k = q^k \not\to 0$ då $k \to \infty$, så serien är inte konvergent i detta fall.

Var börjar serien?

Det är inget speciellt med att vi betraktar summor av talföljder a_k där $k = 0, 1, 2, \ldots$. Vi kan lika gärna undersöka summor där $k = m, m + 1, m + 2, \ldots$, dvs $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Alla satser stämmer ändå. Om en summa konvergerar eller inte har bara att göra med hur termerna a_k beter sig för stora k. Om vi börjar med $k = 0$, $k = 12^{30}$ eller $k = -74$ kvittar för frågan om konvergens.

Vi kan även dela upp summor i delar i de fall då dessa delar beter sig bra.

Sats. Om $c \neq 0$ är en konstant gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Vidare gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

med undantaget då vi får fallen $-\infty + \infty$ eller $\infty - \infty$, eller att gränsvärden inte existerar ens med oändligheterna tillåtna. Dessa fall måste analyseras noggrannare.

Bevisskiss. Beviset följer återigen direkt från att betrakta delsummor. För sådana får vi alltid dela upp och bryta ut konstanter. Vad händer sen när antalet termer går mot oändligheten? Om allt konvergerar är det frid och fröjd.

Som exempel på ett urartat fall kan man betrakta $\sum_{k=0}^{\infty} \big((-1)^k + (-1)^{k+1}\big)$. Alla termerna i serien är noll, men slår vi sönder i två delar uppstår två serier som båda divergerar ordentligt.

2 Positiva serier

Om $a_k \geq 0$ för alla k kallar vi serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ för positiv. Om en sådan serie divergerar går det mot oändligheten och vi skriver som bekant $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ i det fallet. Om inte detta händer är serien konvergent (och lika med ett tal $s \geq 0$).

Med andra ord gäller följande.

Sats. Om $a_k \geq 0$ för alla k så gäller att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ om och endast om serien är konvergent.

2.1 Första jämförelsesatsen

Positiva serier har många trevliga egenskaper. Bland annat gäller följande:

Sats. Om $0 \leq a_k \leq b_k$ för alla k så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Speciellt gäller att

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $\quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent,

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent $\quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent.

Bevis. Beviset följer av att olikheten gäller för alla delsummor eftersom $0 \leq a_k \leq b_k$ och att en växande följd som är begränsad alltid har ett gränsvärde.

Exempel

Visa att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^k}$ är konvergent.

Lösning. Eftersom $1 + 2^k \geq 2^k$ erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

eftersom detta är en geometrisk serie. Inte nog med att vi nu vet att serien konvergerar, vi vet också att den konvergerar mot något som inte är större än 2.

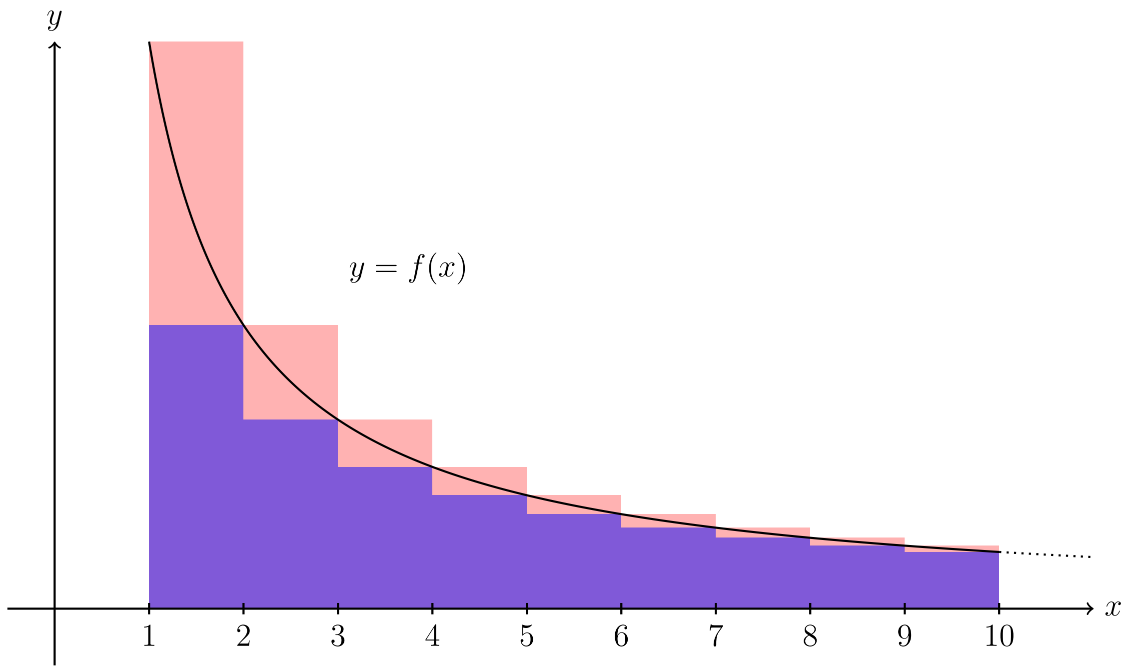
2.2 Cauchys integralkriterium

Cauchys integralkriterium

Sats. Om $f(x) \geq 0$ är en avtagande funktion för $x \geq 1$ så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\, dx < \infty.$$

Beviset följer i princip från en enkel skiss. Vi ritar in en avtagande icke-negativ funktion f och markerar en övertrappa (de rosa rektanglarna) och en undertrappa (de blåa rektanglarna) med heltalssteg.



Vi ser då direkt att summan av arean hos de n första rosa rektanglarna blir $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ och att summan av arean hos de n första blåa rektanglarna blir $\sum_{k=2}^{n+1} f(k)$. Vidare ser vi att arean mellan $y = f(x)$ och x-axeln då $1 \leq x \leq n$ ligger mellan dessa rektangelareor. Således gäller

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_{1}^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Vi låter $n \to \infty$ och satsen följer. Om f är strängt avtagande blir olikheterna strikta (för ändliga n).

Exempel

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} < \infty$ om och endast om $\alpha > 1$.

Lösning. Detta följer av Cauchys jämförelseprincip eftersom $\frac{1}{x^{\alpha}}$ är avtagande för $x > 0$ (eftersom $\alpha > 1$) och att vi vet att $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx < \infty$ precis då $\alpha > 1$ (se förra föreläsningen).

Exempel

Visa att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ för $n = 1, 2, \ldots$.

Lösning. Eftersom $\frac{1}{x^2}$ är avtagande för $x > 1$ följer det från Cauchys jämförelsesats att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Specifikt vet vi då — enligt jämförelsesats — att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent och konvergerar till något som är ≤ 2.

2.3 Jämförelsesats på gränsvärdesform

Sats. Om $a_k \geq 0$ och $b_k \geq 0$ samt

$$0 < \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} < \infty$$

så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty.$$

Med andra ord, om gränsvärdet existerar och ligger strikt mellan 0 och ∞ så konvergerar endera båda serierna eller så divergerar båda två.

Exempel

Avgör om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1/k)}{k}$ är konvergent.

Lösning. Om k är stor är $1/k$ liten och $\sin(1/k) = 1/k + O(1/k^3)$. Vi får alltså en ”extra” $1/k$ från täljaren och jämför därför med $1/k^2$:

$$\frac{\sin(1/k)/k}{1/k^2} = \frac{1/k^2 + O(1/k^4)}{1/k^2} = 1 + O(1/k^2) \to 1, \quad \text{då } k \to \infty.$$

Alltså är serien i fråga konvergent om och endast om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform. Detta eftersom termerna är positiva (för stora k är $\sin 1/k > 0$) och övriga förutsättningar är uppfyllda. Den sista serien är välkänd som konvergent (se exemplet ovan) och därmed är den efterfrågade serien också konvergent.

3 Absolutkonvergens

Absolutkonvergens

Definition. Om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent kallar vi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ för *absolutkonvergent.*

Det följer direkt att en absolutkonvergent serie är konvergent med $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Exempel

Visa att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k}{2^k(2+\sin k)}$ är konvergent och inte är större än 2.

Lösning. Vi visar att serien är absolutkonvergent. Vi har nämligen

$$\left|\frac{\cos k}{2^k(2+\sin k)}\right| = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\cos k|}{2+\sin k} \leq 2^{-k}$$

eftersom $|\cos k| \leq 1$ och $2 + \sin k \geq 1$. Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{1-1/2} = 2$ är serien absolutkonvergent och $\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k}{2^k(2+\sin k)}\right| \leq 2$.

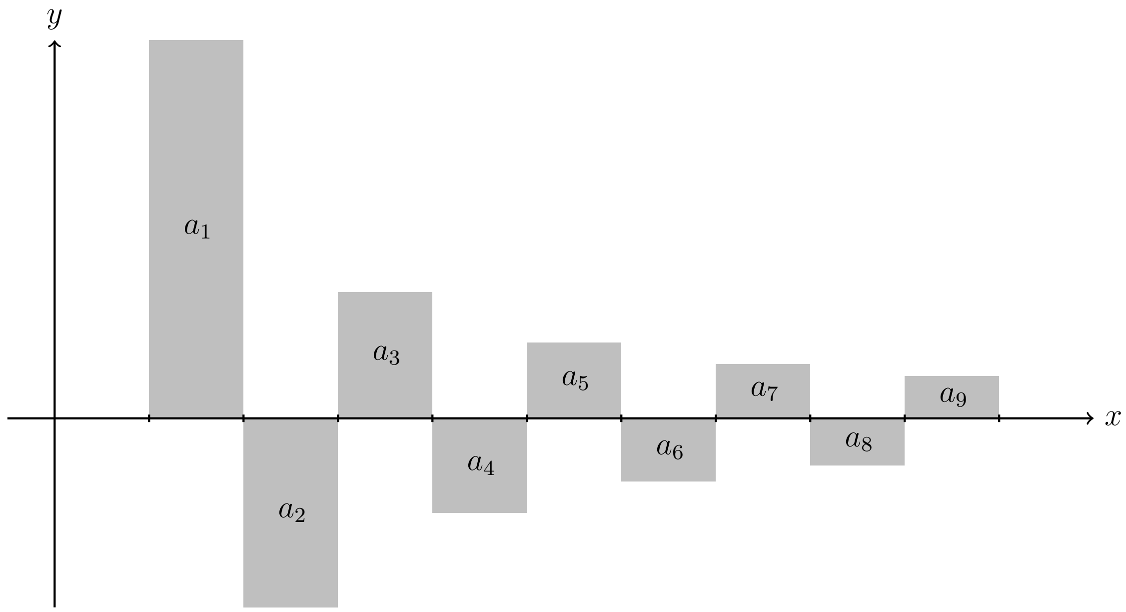
4 Alternerande serier

Vi kallar serier där termer växlar tecken, varannan positiv och varannan negativ, för *alternerande*. För sådana serier finns, om vi kräver att $|a_k|$ avtar mot noll, ett kraftfullt resultat.

Leibniz sats

Sats. Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en alternerande serie sådan att $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \cdots$ är en avtagande följd och $a_k \to 0$ då $k \to \infty$ så är serien konvergent.

Bevis. Antag att $a_1 \geq 0$ (annars kan vi lika gärna betrakta minus serien). Kravet att $|a_k|$ är avtagande innebär då att $a_1 + a_2 \geq 0$, $a_3 + a_4 \geq 0$, etc, samt att $a_2 + a_3 \leq 0$, $a_4 + a_5 \leq 0$ och så vidare.



Tanken är nu att betrakta två olika delsummor s_{2n} och s_{2n+1}. Vi ser då att

$$s_{2n} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \to a,$$

där a möjligen är $+\infty$, eftersom alla parenteser är ≥ 0. Alltså en följd av icke-negativa tal och s_{2n} är växande (gränsvärde finns alltid om vi tillåter ∞). Vidare är

$$s_{2n+1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{2n} + a_{2n+1}) \to b,$$

där b möjligen är $-\infty$, eftersom alla parenteser är ≤ 0. Alltså en följd av icke-positiva tal och s_{2n+1} är avtagande (gränsvärde finns alltid om vi tillåter $-\infty$). Dessutom har vi

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0,$$

vilket innebär att $b - a \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b \geq a$. Detta innebär att båda a och b måste vara ändliga. Men vi vet också att $a_k \to 0$ vilket i sin tur visar att $a = b$. Således konvergerar serien.

Exempel

Visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ är konvergent men inte absolutkonvergent.

Lösning. Med $a_k = (-1)^k/k$ ser vi att $|a_k| = 1/k$ är en avtagande följd och att $a_k \to 0$. Eftersom serien är alternerande visar nu Leibniz sats att den är konvergent. Mot vad? Bra fråga, faktiskt till $-\ln 2$ (gå tillbaka till Maclaurinavsnittet och studera $\ln(1+x)$ och fundera över hur detta kan komma sig). Däremot är serien inte absolutkonvergent eftersom

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Detta är som bekant den harmoniska serien.

Det är **tre** krav som gäller för Leibniz kriterium:

(i) Serien är alternerande så att $a_{k+1} = -a_k$ för alla k som det summeras över.

(ii) Seriens termer går mot noll: $a_k \to 0$.

(iii) Absolutbeloppet av seriens termer avtar monotont: $|a_k| \geq |a_{k+1}| \geq |a_{k+2}| \geq \cdots$

Ibland summeras de två sista villkoren som att $|a_k|$ avtar monotont mot noll. Det sista villkoret är viktigt och måste visas! Följande serie ger ett motexempel.

Exempel

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ är divergent om $a_k = \dfrac{1}{k^2}$ då k är udda och $a_k = \dfrac{1}{k}$ då k är jämt.

Lösning. Vi ser att serien är alternerande och att termerna går mot noll $|a_k| \to 0$ då $k \to \infty$. Det är alltså lockande att hugga till med Leibniz kriterium, men på grund av hur a_k ser ut så kommer inte $|a_k|$ vara monotont avtagande. Därmed kan vi **inte** använda Lebniz kriterium. Om vi undersöker serien direkt ser vi följande:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6} - \cdots$$

De positiva termerna bildar alltså en del av en harmonisk serie (och är divergent exempelvis enligt Cauchys intergralkriterium med $f(x) = \dfrac{1}{2x}$) medan de negativa konvergerar eftersom serien $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} < \infty$. Det finns alltså inget hopp för serien som helhet, utan den är divergent. Det är alltså inte ”petigt” när det inte ges poäng på tentan när inte *alla* förutsättningarna för Lebniz kriterium redovisas! Även om serien skulle visa sig vara konvergent i slutändan.

Exempel

Visa att $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ *inte* är absolutkonvergent.

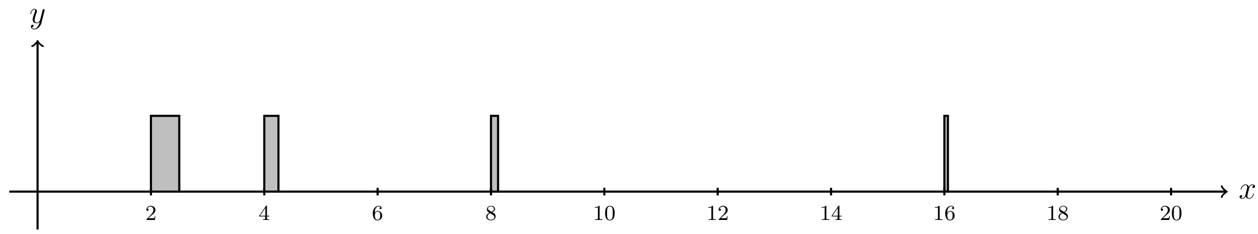
Lösning. Vi kan visa detta genom att skriva integralen som en serie av delintegraler och uppskatta på varje del. Hur då? Vi kan skriva

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin x|}{|x|}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

eftersom $\displaystyle\int_{0}^{\pi} |\sin x|\, dx = 2$ (blir samma för varje intervall $[k\pi, (k+1)\pi]$).

5 Divergenstest?

Observera att det inte finns något test för generaliserade integraler analogt med divergenstestet för serier. Vi vet redan att det inte är tillräckligt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ för att $\int_1^\infty f(x)\,dx$ ska vara konvergent (tänk tex $f(x) = 1/x$). Men bara för att integralen är konvergent behöver inte heller funktionen gå mot noll. Betrakta följande konstruktion.



Funktionen f är alltså bitvis konstant; mellan 2^k och $2^k + 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$, är $f(x) = 1$, och för övrigt är $f(x) = 0$. Således blir

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2} = 1.$$

Integralen är alltså konvergent, men $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ (gränsvärdet saknas). Genom att ersätta rektanglarna med trianglar kan vi även skapa en kontinuerlig funktion med samma egenskap, och med snällare objekt även deriverbara exempel. Vi kan till och med skapa obegränsade exempel genom att låta bredd och höjd förhålla sig till varandra på lämpligt sätt (dubbla höjden och dela bredden med fyra till exempel).
Nu kanske man kan tycka att funktionen blir väldigt mycket noll borta i oändligheten ändå (även om gränsvärdet så klart saknas), men ett sådant påstående behöver kvalificeras. Begrepp som mått är nödvändigt så den intresserade personen hänvisas till lämplig kurs i mått- och integrationsteori.