Föreläsning 12: Tillämpningar av potensserier

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

24 mars 2022

Vi har introducerat potensserier

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

och visat att dessa har en *konvergensradie* R så serien är absolutkonvergent när $|x| < R$ och divergent när $|x| > R$. Vi tillåter $R = 0$ (konvergent endast i $x = 0$) och $R = \infty$ (konvergent för alla x). Vi konstaterade att för $|x| < R$ gick det att *termvis* derivera och integrera potensserier:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \qquad \text{och} \qquad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1},$$

där dessa ”nya” potensserier har samma konvergensradie.

1 Lösningar till DE på serieform

Genom att ansätta en lösning som en serie $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ och låta ekvationen ge villkor på koefficienterna c_k kan man ofta hitta lösningar till DE:er som man inte kan lösa med de metoder vi tidigare använt. Speciellt i de fall då vi inte har konstanta koefficienter eftersom dessa är svåra att behandla. Men låt oss börja med något ”enkelt.”

Exempel

Utnyttja att den unika lösningen till $y' - y = 0$, $y(0) = 1$, ges av $y(x) = e^x$ för att hitta en serieutveckling för e^x.

Lösning. Vi ansätter en potensserie på formen $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ och undersöker när denna löser differentialekvationen. Vi skriver ut den termvisa deriveringen av $y(x)$ och indexerar om serien så vi summerar termer av typen x^k i stället för x^{k-1}:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k.$$

Nu söker vi koefficienterna c_k så att

$$0 = y'(x) - y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+1) c_{k+1} - c_k\big) x^k$$

där vi utnyttjar att båda serierna är absolutkonvergenta för att slå ihop summorna. För att detta nu ska bli noll för alla x (med $|x| < R$) måste $(k+1)c_{k+1} - c_k = 0$ för $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Vi vet också att $y(0) = 1$ vilket ger att $c_0 = 1$ (varför?). Med andra ord uppfyller c_k det rekursiva sambandet $c_0 = 1$ och $c_{k+1} = c_k/(k+1)$ för $k = 1, 2, \ldots$ Vi itererar några steg och ser vad som händer:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1, \\
c_1 &= \frac{c_0}{0+1} = 1, \\
c_2 &= \frac{c_1}{1+1} = \frac{1}{2}, \\
c_3 &= \frac{c_2}{2+1} = \frac{1}{2 \cdot 3}, \\
c_4 &= \frac{c_3}{3+1} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \\
&\vdots \\
c_{k+1} &= \frac{c_k}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}.
\end{aligned}$$

Vi får alltså serien $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Konvergensradien blir $R = \infty$ eftersom

$$\frac{|x|^{k+1}/(k+1)!}{|x|^k/k!} = \frac{k!}{(k+1)!}|x| = \frac{1}{k+1}|x| \to 0,$$

då $k \to \infty$. Vi känner igen svaret från Maclaurinutvecklingen av e^x, vilket är vad vi ville visa. Mer noggrant, vi vet sedan tidigare att ekvationen har den entydiga lösningen $y(x) = e^x$ (vi visar detta genom att använda en integrerande faktor). Vi har nu visat att även $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ löser ekvationen för alla $x \in \mathbf{R}$. Således måste $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbf{R}$.

Vi kan även komma åt ekvationer vi inte kunnat lösa tidigare som i följande exempel.

Exempel

Finn alla lösningar till ekvationen $y'' + xy' + y = 0$ som kan uttryckas som en potensserie.

Lösning. Vi ansätter $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Då blir

$$\begin{aligned}
xy' &= x \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k \\
y'' &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k
\end{aligned}$$

där vi indexerat serierna lämpligt för att nu kunna undersöka ekvationen:

$$
\begin{aligned}
0 = y'' + xy' + y &= \sum_{k=0}^{\infty} \left((k+2)(k+1)c_{k+2} + kc_k + c_k\right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\left((k+2)c_{k+2} + c_k\right) x^k
\end{aligned}
$$

vilket medför att $c_{k+2} = -\dfrac{c_k}{k+2}$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$ Eftersom c_{k+2} bara beror på c_k kommer det att dyka upp två "sorters" termer (det är två steg mellan k och $k+2$). Vi skiljer därför nu på udda och jämna k. Först jämna index. Alltså,

$$
\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{c_0}{2} \\
c_4 &= -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2 \cdot 4} \\
c_6 &= -\frac{c_4}{6} = -\frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6} \\
&\vdots \\
c_{2k} &= -\frac{c_{2k-2}}{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2^k \cdot k!}
\end{aligned}
$$

och för udda k,

$$
\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{c_1}{3} \\
c_5 &= -\frac{c_3}{5} = \frac{c_1}{3 \cdot 5} \\
c_7 &= -\frac{c_5}{7} = -\frac{c_1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \\
&\vdots \\
c_{2k+1} &= -\frac{c_{2k-1}}{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} = \frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k! \cdot c_1}{(2k+1)!}.
\end{aligned}
$$

Ibland använder man skrivsättet $(2k+1)!! = (2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 5 \cdot 3$, dvs produkten av alla udda positiva heltal mindre än eller lika med $2k+1$. Analogt kan man definiera $(2k)!!$ som produkten av de jämna heltalen. Vi kan nu skriva upp hur lösningarna $y(x)$ ser ut:

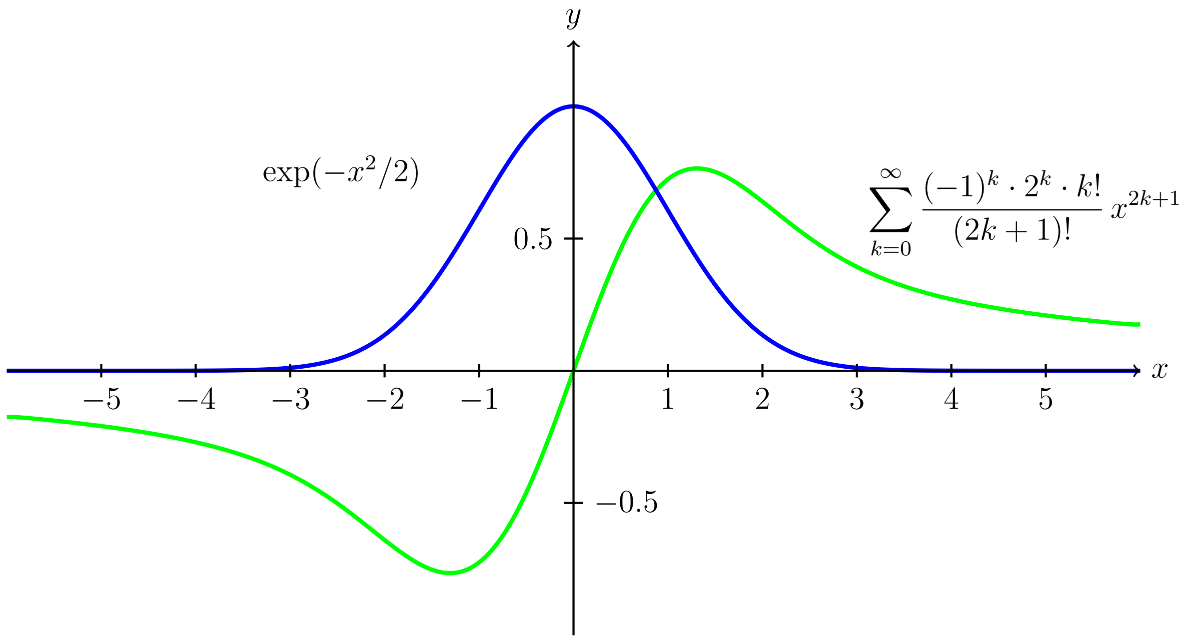
$$
y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}.
$$

För vilka x? Vi undersöker konvergensradierna och ser att dessa är $R = \infty$ i båda fallen. Våra lösningar löser alltså ekvationen på hela $\mathbf{R}$. Konstanterna c_0 och c_1 är godtyckliga och kan till exempel bestämmas om begynnelse- eller randvillkor är givna.

Den första serien kan vi utan allt för stora problem se blir $c_0 \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ (visa det). Den andra serien är lite svårare att analysera. Man kan dock visa att den kan skrivas

$$
c_1 \frac{2x}{|x|\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_0^{|x|\sqrt{2}/2} \exp\left(s^2\right)\, ds.
$$

Vi ritar upp funktionerna för $c_0 = c_1 = 1$. Den gröna är den udda serien och den blåa den jämna.



Inte direkt den typen av funktioner vi funnit tidigare när vi löst linjära DE av andra ordningen! Följdfråga: är $y(x)$ enligt ovan den allmänna lösningen till ekvationen i fråga eller finns det fler?

Vi kan även prata om potensserier kring andra punkter än $x = 0$; jämför med hur vi gick från Maclaurinpolynom till Taylorpolynom. Vi arbetar alltså i det här läget med serier

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k.$$

Funktioner som kan uttryckas i form av potensserier enligt detta kallas analytiska.

Analytisk funktion

Definition. En funktion f kallas analytisk i en punkt $x = x_0$ om det finns ett öppet intervall $I =]x_0 - c, x_0 + c[$ så att $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ för alla $x \in I$. Med andra ord så konvergerar potensserien till f nära x_0

När vi ansätter potensserier för att lösa DE söker vi alltså analytiska lösningar (åtminstone analytiska i $x = 0$). Det är värt att notera här att det finns funktioner som är kontinuerligt deriverbara till och med oändligt många gånger men som fortfarande inte är analytiska. Betrakta exemplet från föreläsning 3 där $f(x) = \exp(-1/x^2)$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 0$. Maclaurinserien till denna funktion är identiskt lika med noll (samtliga $c_k = 0$) vilket så klart endast stämmer överens i just $x = 0$ (det finns alltså inget öppet intervall). Men i övrigt är funktionen snäll. Men man kan konstruera exempel (oändligt deriverbara) som inte är analytiska i en enda punkt. Exempelvis är

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} \cos kx$$

faktiskt en funktion som är oändligt många gånger kontinuerligt deriverbar men som inte är analytisk i en enda punkt. Kul va! Dagens patologiska exempel är därmed avklarat. Faktum är

att mängden av snälla funktioner som inte är analytiska i en enda punkt är betydligt större[1] än mängden av analytiska funktioner.
Det är inte heller så trevligt att alla analytiska funktioner enkelt kan representeras som så kallade elementära funktioner. Exempelvis går lösningarna till följande DE under namnet *Airy*-funktioner.

Exempel

Finn alla analytiska (i $x = 0$) lösningar till $y'' - xy = 0$.

Lösning. Vi söker analytiska lösningar och ansätter då en potensserie $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Då ges ekvationen av

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k \\
&= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_{k-1}\big)x^k
\end{aligned}$$

Alltså måste $c_2 = 0$ och för $k = 1, 2, \ldots$ måste $c_{k+2} = c_{k-1}/(k+2)(k+1)$. Vi erhåller alltså 3 ”sorters” koefficienter så vi betraktar c_{3k}, c_{3k+1} och c_{3k+2}. Det följer från att $c_2 = 0$ att $c_{3k+2} = 0$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$. Vi fortsätter med c_{3k}:

$$\begin{aligned}
c_3 &= \frac{c_0}{3 \cdot 2} \\
c_6 &= \frac{c_3}{6 \cdot 5} = \frac{c_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \\
c_9 &= \frac{c_6}{9 \cdot 8} = \frac{c_0}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \\
&\vdots \\
c_{3k} &= \frac{c_{3k-3}}{3k(3k-1)} = \frac{(3k-2)!!!\, c_0}{(3k)!},
\end{aligned}$$

där $n!!!$ definieras som produkten av alla heltal n, $n-3$, $n-6$, $n-9$ och så vidare till vi hamnar i 1, 2 eller 3. Exempelvis är $12!!! = 12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3$ och $14!!! = 14 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2$. På liknande sätt har vi

$$\begin{aligned}
c_4 &= \frac{c_1}{4 \cdot 3} \\
c_7 &= \frac{c_4}{7 \cdot 6} = \frac{c_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \\
c_{10} &= \frac{c_7}{10 \cdot 9} = \frac{c_1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \\
&\vdots \\
c_{3k+1} &= \frac{c_{3k-2}}{3k(3k+1)} = \frac{(3k-1)!!!\, c_1}{(3k+1)!}.
\end{aligned}$$

[1] I Baires mening. Mängden av funktioner analytiska i någon punkt — sett som delmängd av $C^\infty(I)$ på ett intervall I — är av den första kategorin. Detta innebär att den mängden är betydligt mindre än komplementet som består av C^∞-funktioner på I som inte är analytiska i en enda punkt.

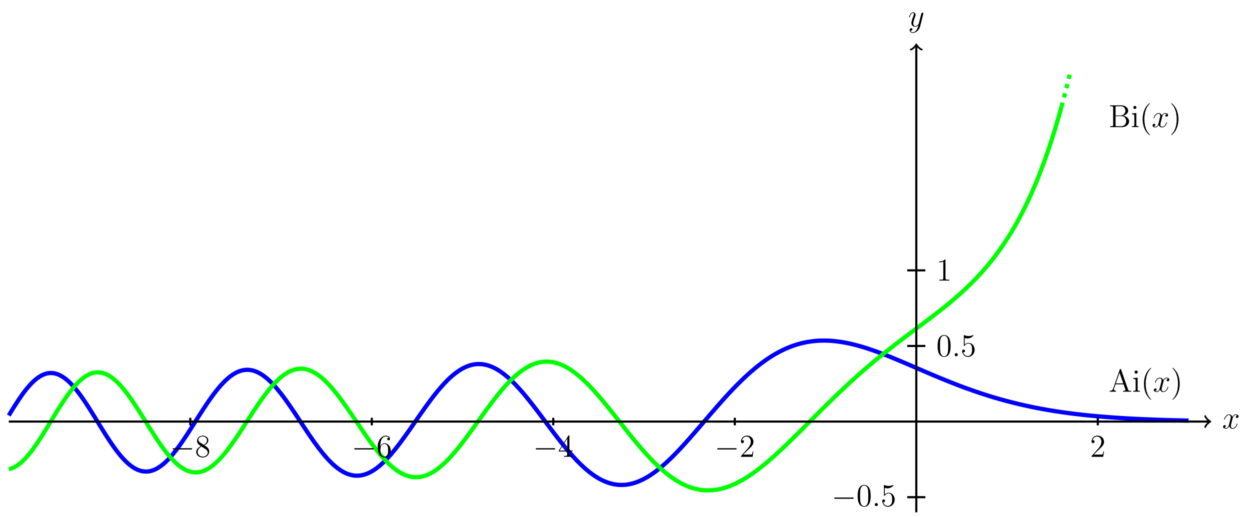
Vi kan nu skriva upp hur lösningarna $y(x)$ ser ut:

$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-2)!!!}{3k!} x^{3k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!} x^{3k+1}.$$

Vi låter här $(-2)!!! = 1$ och $(-1)!!! = 1$ för att underlätta notationen. För vilka x? Vi undersöker konvergensradierna och ser att dessa är $R = \infty$ i båda fallen. Våra lösningar löser alltså ekvationen på hela $\mathbf{R}$ och är analytiska på hela $\mathbf{R}$ också. Dessa funktioner brukar som sagt kallas Airy-funktioner och vi kan definiera

$$\mathrm{Ai}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-2)!!!}{3k!} x^{3k} \qquad \text{och} \qquad \mathrm{Bi}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!} x^{3k+1}$$

för $x \in \mathbf{R}$. Vi skissar upp funktionerna (den blå är $\mathrm{Ai}(x)$ och den gröna är $\mathrm{Bi}(x)$).



Dessa funktioner är speciellt roliga eftersom de först beter sig svängande innan de ”plötsligt” bestämmer sig för att agera som exponentialfunktioner i stället. Fascinerande!

2 Maclaurinserier

Entydighetssatsen för Maclaurinutvecklingar medför att om f är en analytisk funktion i $x = 0$ så måste $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, dvs en potensserie $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ **måste** ha $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Exempel

Låt oss återigen betrakta $f(x) = e^x$. Vi visar att $r(x) \to 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$ om antalet termer i Maclaurinpolynomet går mot oändligheten.

Lösning. Lagranges form på resttermen för utvecklingen av ordning n ges av $r(x) = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$ för något ξ mellan 0 och x (där x är fixt). Då är

$$|r(x)| \leq \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad \text{då } n \to \infty$$

enligt standardgränsvärde eftersom $a^n/n! \to 0$ då $n \to \infty$ (vi låter alltså $a = |x|$ och utnyttjar att $e^{\xi} \leq e^{|x|} < \infty$). Eftersom resttermen går mot noll har vi visat att

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Kan vi komma åt resultat av denna typ utan att gå via Lagranges restterm?

Exempel

Visa att $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ konvergerar för alla x.

Lösning. Direkt via kvotkriteriet erhåller vi att

$$\left| \frac{(-1)^{k+1}x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!} \cdot \frac{(2k)!}{(-1)^k x^{2k}} \right| = \frac{|x|^2}{(2k+2)(2k+1)} \to 0,$$

då $k \to \infty$. Serien har alltså konvergensradie $R = \infty$. Eftersom $\cos x$ är kontinuerligt deriverbar oändligt många gånger och Maclaurinkoefficienterna för $\cos x$ ges av koefficienterna i serien ovan medför entydigheten att detta är Maclaurinserien för $\cos x$.

Konvergensradie från rekursionsformel

Ansatsen $y = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ till ekvationen $(1+3x^2)y' = 2xy$ med kravet $y(0) = 1$ leder till

$$(k+2)c_{k+2} = (2-3k)c_k \quad \Leftrightarrow \quad c_{k+2} = \frac{2-3k}{k+2}c_k, \quad \text{samt } c_0 = 1 \text{ och } c_1 = 0.$$

Då gäller att samtliga $c_{2k+1} = 0$ och svaret fås på formen $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k}$ (udda termer försvinner).

Låt nu $b_k = c_{2k}$ så att $y = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k}$. Kvottestet visar att vi har absolutkonvergens då

$$1 > \lim_{k\to\infty} \frac{|b_{k+1}x^{2(k+1)}|}{|b_k x^{2k}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|c_{2k+2}|}{|c_{2k}|}x^2 = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2-3\cdot 2k}{2k+2} \right| x^2 = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vi sammanfattar några av de kända Maclaurinserierna med deras respektive konvergensområden. Jämför med motsvarande Maclaurinutvecklingar från föreläsning 3.

Maclaurinserier

(i) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots, \; -\infty < x < \infty.$

(ii) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots, \; -1 < x \leq 1.$

(iii) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots, \; -\infty < x < \infty.$

(iv) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots, \; -\infty < x < \infty.$

(v) $\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= x + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots\end{aligned}, \; -1 < x < 1.$

(vi) $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, \; -1 \leq x \leq 1.$

3 Modifierade serieansatser

Vi har tidigare stött på DE av Euler-typ,

$$x^2y'' + axy' + by = 0,$$

som vi kunde lösa genom att substituera $t = \ln x$ (för $x > 0$). Lösningarna kan även fås genom att finna rötterna till $r^2 + (a-1)r + b = 0$ och bilda $c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$ om $r_1 \neq r_2$ och $c_1x^{r_1} + c_2x^{r_1}\ln x$ om $r_1 = r_2$ (komplexa rötter kräver lite omskrivning för att få över allt på reell form). Man visar detta genom att ansätta x^r som lösning och se vilka villkor man får på r. Utför detta! Kan man göra något liknande för ekvationer där a och b beror på x?

Exempel

Hitta lösningar till Bessels DE av ordning 0 och 1/2, dvs $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ med $\nu = 0$ och $\nu = 1/2$.

Lösning. En direkt potensserieansats visar sig resultera i svårlösta problem så vi ansätter i stället en modifierad ansats $y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ där r måste bestämmas på något sätt. Vi deriverar glatt och ser vad vi får:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+r)x^{k+r-1} \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} \end{aligned}$$

från vilket det följer att ekvationen kan skrivas

$$\begin{aligned}
0 &= x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+r)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k\big((k+r)(k+r-1) + k + r - \nu^2\big)x^{k+r} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}x^{k+r} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k\big((k+r)^2 - \nu^2\big)x^{k+r} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}x^{k+r} \\
&= c_0\big(r^2 - \nu^2\big)x^r + c_1\big((1+r)^2 - \nu^2\big)x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\big(c_k\big((k+r)^2 - \nu^2\big) + c_{k-2}\big)x^{k+r}.
\end{aligned}$$

Här ser vi att endera måste $c_0 = 0$ eller så måste $r = \pm\nu$ för att ekvationen ska vara sann (för alla $x > 0$). Vidare måste $c_1 = 0$ om inte $r = -1/2$. Sen blir det rekursiva sambandet

$$c_k = \frac{-c_{k-2}}{(k+r)^2 - \nu^2}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Fall 1: $\boldsymbol{\nu = 0}$. Här ser vi att $r = 0$ för att slippa sätta $c_0 = 0$. Då blir $c_1 = 0$ vilket ger alla udda termer $= 0$. Vi undersöker de jämna:

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{-c_0}{2^2} \\
c_4 &= \frac{-c_2}{4^2} = (-1)^2\frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2} = (-1)^2\frac{c_0}{2^{2+2} \cdot 2^2} \\
c_6 &= \frac{-c_4}{6^2} = (-1)^3\frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} = (-1)^3\frac{c_0}{2^{2+2+2} \cdot 2^2 \cdot 3^2} \\
&\vdots \\
c_{2k} &= \frac{-c_{2k-2}}{(2k)^2} = \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k}\,(k!)^2}.
\end{aligned}$$

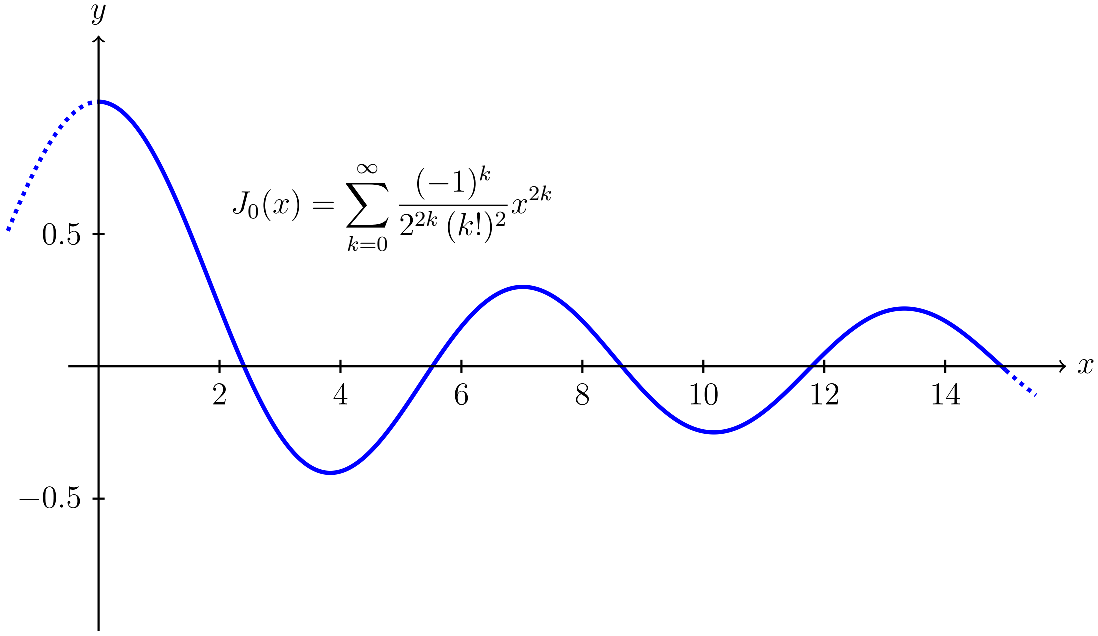
Vi erhåller alltså $y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2} x^{2k}$. Konvergensradien hittar vi till exempel med kvot-kriteriet:

$$\left| \frac{x^{2(k+1)}}{2^{2(k+1)}\,((k+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2k}\,(k!)^2}{x^{2k}} \right| = \frac{|x|^2}{4}\left(\frac{1}{k+1}\right)^2 \to 0$$

då $k \to \infty$. Serien konvergerar alltså för alla x. Dubbelroten som vi fann ovan ($r = 0$) är anledningen till att vi bara erhåller en ”sorts” lösning. För att hitta en oberoende lösning till krävs en hel del arbete till så vi stannar här.
Den lösning vi hittat brukar kallas *Bessels* funktion av ordning 0 och betecknas

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2} x^{2k}.$$

Det är en svängande funktion med avtagande amplitud.



Fall 2: $\nu^2 = 1/4$. Här ser vi att $r = \pm 1/2$ för att slippa sätta $c_0 = 0$. När det gäller c_1 beror det på om $\nu = 1/2$ eller om $\nu = -1/2$. För $\nu = 1/2$ måste $c_1 = 0$ på samma sätt som i fall 1. För $\nu = -1/2$ är c_1 godtycklig eftersom $(1 + r)^2 - \nu^2 = 0$ i det fallet. Vi undersöker de jämna koefficienterna först:

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \frac{-c_0}{2(2 \pm 1)} \\
c_4 &= \frac{-c_2}{4(4 \pm 1)} = (-1)^2 \frac{c_0}{2(2 \pm 1) \cdot 4(4 \pm 1)} \\
c_6 &= \frac{-c_4}{6(6 \pm 1)} = (-1)^3 \frac{c_0}{2(2 \pm 1) \cdot 4(4 \pm 1) \cdot 6(6 \pm 1)} \\
&\vdots \\
c_{2k} &= \frac{-c_{2k-2}}{2k(2k \pm 1)} = (-1)^k \frac{c_0}{2(2 \pm 1) \cdot 4(4 \pm 1) \cdot 6(6 \pm 1) \cdots 2k(2k \pm 1)}.
\end{aligned}
$$

För $\nu = 1/2$ är det plussen som gäller och vi ser då att $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$. Vi erhåller alltså

$$
y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1/2} = c_0 x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = c_0 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}
$$

eftersom vi känner igen Maclaurinutvecklingen för $\sin x$. Serien konvergerar för alla x, men vi har kravet $x > 0$ från tidigare så vi har enbart lösningar för $x > 0$.

När det gäller $\nu = -1/2$ är c_1 godtycklig och vi kan ta fram koefficienterna $c_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}$ samt $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k c_0}{(2k)!}$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$. Detta ger oss lösningarna

$$
y(x) = c_0 x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + c_1 x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = c_0 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}
$$

för $x > 0$. Vi erhöll här precis Maclaurinutvecklingarna för cos respektive sin. Dessa funktioner kan ritas upp (den gröna är cos-termen och den blåa är sin-termen).